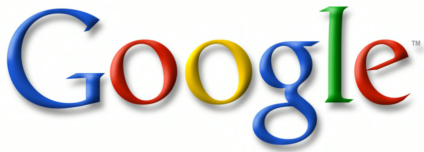
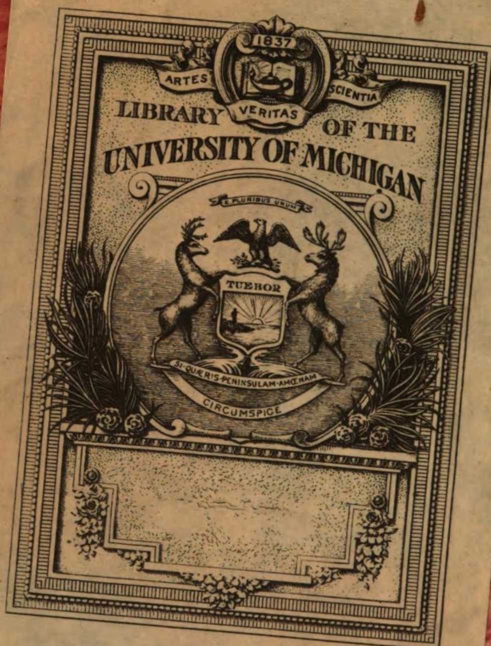



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Anfangsgründe

Anfangsgründe der Mathematik,

zum Gebrauche der mathematischen Schule des kaiserl. königl. Artilleriekorps.

Zweiter Teil. Die Geometrie.

Erster Band.

verfaßt

Von Leopold Unterberger,

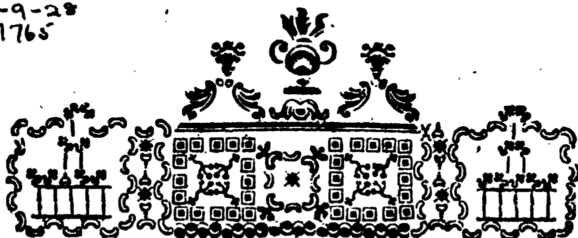
Hauptmann und öffentlichen Lehrer der Mathematik bei dem kaiserl. königl. Feldartilleriekorps.



WIEN,

gedruckt bey Joh. Thom. Edl. v. Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1775.



Vorrede.

Es erscheinet gegenwärtig der zweite Teil meiner unternommenen Arbeit, der die theoretische und praktische Geometrie enthält. Obwohl ich mich in diesem so wie in dem ersten der möglichsten Kürze, so doch bei gehöriger Aufmerksamkeit der Deutlichkeit unschädlich ist, beflissen habe, so ist doch derselbe wegen des Reichthums an nüzlichen, und eben daher nicht zu übergehenden Materien so angewachsen, daß ich ihn um der Bequemlichkeit willen, in zween Bände abzuteilen, und den erstern den theoretischen, den andern aber den praktischen Teil der Geometrie zu benennen bewogen worden. In beiden habe ich mich hauptsächlich beflissen, erstlich die Materien so einzuteilen, und aufeinander folgen zu lassen, wie es teils die Natur und der eigentliche Gegenstand, teils auch die Verknüpfung der Säze und die begreiflichste Herleitung der nachfolgenden aus den vorhergehenden erforderte, in so weit beide Absichten zugleich bequem zu erreichen

waren. Zweitens so wenig Lehrsäße anzubringen als nur thunlich wäre, hingegen aus denselben alle nüßliche Folgerungen zu ziehen, sie zu brauchbaren Aufgaben anzuwenden, und ihre Auflösungen so viel möglich algemein zu machen, oder wenigstens auf die am meisten vorkommende Fälle einzurichten. Ueberhaupt aber erinnerte ich mich stäts dabey, daß keine zum wahren Nußen bestimmte Bücher, am wenigsten aber solche, die dem Kriegsstande gewidmet sind, mit leeren und unbrauchbaren Grübeleien, so schön und kunstreich sie an sich auch scheinen mögen, angefüllet werden müssen.

Da die Algebra in den neuern Zeiten glicklicher weise zur mathematischen Sprache geworden, und man sich ohne derselben sehr oft nur mit einer abmattenden Weitläuffigkeit, nie aber so kurz, so algemein, und so bestimmt, als durch dieselbe ausdrücken kan, so habe ich mich ihrer in den meisten Beweisen und Auflösungen bedienet. Ich glaube, daß ich hierüber nur von solchen Lesern getadelt werden kan, die entweder die Erlernung der Algebra, ich weis nicht aus was für einer vorgefaßten Meinung, für zu schwer halten, oder auch dazu würklich das Vermögen nicht haben. Den erstern empfehle ich nichts mehr als einen ernstlichen Vorsaß, und einen durch einige Wochen unverdrossen anhaltenden Fleis, so wird das Vorurteil ganz gewis verschwinden; Den andern aber: was kan ich ihnen anders sagen, als daß sie weit mehr Mühe und Arbeit anzuwenden haben, um in der Mathematik endlich dennoch nur mittelmässig zu werden.

Ich halte es für unnöhtig, von der Einrichtung des ersten Teiles hier ins besondere Meldung zu machen; da solches in der Einleitung ohnehin geschiehet; nur muß ich dabey erinnern, daß die Abhandlung von Re-

gel-

gelschnitten mit Bedacht nicht volständig ausgeführet worden. Die Ursache davon ist, weil nicht nur einige, sonderlich die Ellipse und die Hyperbol betreffende Beweise schwer und weitlaüffig sind, sondern auch überhaupt der Gebrauch dieser beiden krummen Linien im Kriegswee-sen nicht häuffig ist; Von der Parabol aber, welche in der Mechanik und Artillerie oft angewendet wird, findet man so viel, als davon zu der im dritten Teile vorkommenden Lehre von geworffenen Körpern zu wissen nöhtig ist. Ich glaube aber verbunden zu sein, von dem zweiten oder praktischen Teile in folgenden eine nähere Rechenschaft zu geben.

Es ist fast kein Teil der Mathematik, der den Anfängern angenehmer und leichter vorkäme, aber auch zugleich nützlicher wäre, als die Trigonometrie. Ohne Zweifel sind die algemeine, wenige, und leichte Grundsätze, durch die in allen möglichen Dreiecken aus den erfoderlichen bekanten Teilen die unbekante gefunden werden, die Ursache davon. Da über dieses ihre vorzügliche Brauchbarkeit sich unter andern auch bei richtiger Abmessung verschiedener Entfernungen und bei Aufnehmung der Grundrisse und Landkarten äussert, so wird sie auch im Kriegsweesen von der äußersten Nohtwendigkeit. Diese also, und der magere Unterricht, den man fast gewöhnlich in den meisten mathematischen Schriften davon antrift, haben mich veranlasset, diesen so angenehmen als nützlichen Teil der Geometrie in dem zweiten Bande etwas ausführlicher als gewöhnlich abzuhandeln. Es wird demnach

Erstens, von den Gründen der geradlinigten Trigonometrie überhaupt, und von dem Gebrauche der Si-

waren. Zweitens so wenig Lehrsätze anzubringen als nur thunlich wäre, hingegen aus denselben alle nützliche Folgerungen zu ziehen, sie zu brauchbaren Aufgaben anzuwenden, und ihre Auflösungen so viel möglich algemein zu machen, oder wenigstens auf die am meisten vorkommende Fälle einzurichten. Ueberhaupt aber erinnerte ich mich stäts dabey, daß keine zum wahren Nutzen bestimmte Bücher, am wenigsten aber solche, die dem Kriegsstande gewidmet sind, mit leeren und unbrauchbaren Grübeleien, so schön und kunstreich sie an sich auch scheinen mögen, angefüllet werden müssen.

Da die Algebra in den neuern Zeiten glücklicher weise zur mathematischen Sprache geworden, und man sich ohne derselben sehr oft nur mit einer abmattenden Weitläuffigkeit, nie aber so kurz, so algemein, und so bestimmt, als durch dieselbe ausdrücken kan, so habe ich mich ihrer in den meisten Beweisen und Auflösungen bedienet. Ich glaube, daß ich hierüber nur von solchen Lesern getadelt werden kan, die entweder die Erlernung der Algebra, ich weis nicht aus was für einer vorgefaßten Meinung, für zu schwer halten, oder auch dazu würklich das Vermögen nicht haben. Den erstern empfehle ich nichts mehr als einen ernstlichen Vorsatz, und einen durch einige Wochen unverdrossen anhaltenden Fleis, so wird das Vorurteil ganz gewis verschwinden; Den andern aber: was kan ich ihnen anders sagen, als daß sie weit mehr Mühe und Arbeit anzuwenden haben, um in der Mathematik endlich dennoch nur mittelmässig zu werden.

Ich halte es für unnöhtig, von der Einrichtung des ersten Teiles hier ins besondere Meldung zu machen; da solches in der Einleitung ohnehin geschiehet; nur muß ich dabey erinnern, daß die Abhandlung von Re-

gel-

gelschnitten mit Bedacht nicht volständig ausgeführet worden. Die Ursache davon ist, weil nicht nur einige, sonderlich die Ellipse und die Hyperbol betreffende Beweise schwer und weitlaüffig sind, sondern auch überhaupt der Gebrauch dieser beiden krummen Linien im Kriegsweesen nicht häuffig ist; Von der Parabol aber, welche in der Mechanik und Artillerie oft angewendet wird, findet man so viel, als davon zu der im dritten Teile vorkommenden Lehre von geworffenen Körpern zu wissen nöhtig ist. Ich glaube aber verbunden zu sein, von dem zweiten oder praktischen Teile in folgenden eine nähere Rechenschaft zu geben.

Es ist fast kein Teil der Mathematik, der den Anfängern angenehmer und leichter vorkäme, aber auch zugleich nützlicher wäre, als die Trigonometrie. Ohne Zweifel sind die algemeine, wenige, und leichte Grundsätze, durch die in allen möglichen Dreiecken aus den erfoderlichen bekanten Teilen die unbekante gefunden werden, die Ursache davon. Da über dieses ihre vorzügliche Brauchbarkeit sich unter andern auch bei richtiger Abmessung verschiedener Entfernungen und bei Aufnehmung der Grundrisse und Landkarten äussert, so wird sie auch im Kriegsweesen von der äusersten Nohtwendigkeit. Diese also, und der magere Unterricht, den man fast gewöhnlich in den meisten mathematischen Schriften davon antrift, haben mich veranlasset, diesen so angenehmen als nützlichen Teil der Geometrie in dem zweiten Bande etwas ausführlicher als gewöhnlich abzuhandeln. Es wird demnach:

Erstens, von den Gründen der geradlinigten Trigonometrie überhaupt, und von dem Gebrauche der Si-

nustafeln ohne sich aber mit ihrer Berechnungsart selbst aufzuhalten, gehandelt.

Zweitens, wird die Auflösung oder Berechnung der geradlinigten Dreiecken in allen Fällen gewiesen, und mit Beispielen erleutert.

Drittens: Da ich öfters wahrgenommen, daß viele der Mathematik beflissene, sonderlich aber Anfänger, die erforderliche Eigenschaften und den Gebrauch der Instrumenten, deren man sich bei trigonometrischen Operationen zum Winkelmessen bedienet, sehr wenig kennen, von der nöhtigen Prüfung, und Berichtigung derselben vor dem Gebrauche aber kaum einen Begriff haben, so glaubte ich, nicht unrecht zu thun, wenn ich von diesem zur Ausübung selbst so nohtwendigen Gegenstande einigen Unterricht erteilte. Ich weiß zwar, daß hierin das wesentlichste in der würklichen Handanlegung und in dem werktähtigen Unterrichte bestehe; aber auch hieran sol es wenigstens unsern Schülern nicht fehlen.

Viertens, werden die Auflösungen der bei trigonometrischen Abmessungen am meisten sich ereignenden einzelnen Fällen gegeben. Da man ferner in der Ausübung wegen vorkommender Hindernisse sehr oft genöhtiget ist, die erforderliche Winkel ausser dem eigentlichen Standpunkte oder auch mit schiefgestelten Instrumente zu beobachten, so wird auch von der Reduktion der solchergestalt beobachteten Winkel, und zwar im ersten Falle, auf ihren wahren Punkt, und im andern, auf den Horizont, gehandelt; und da man hiezu gemeiniglich die Sinusse von sehr spitzigen Winkeln nöhtig hat, diese aber in den gewöhnlichen Tafeln nicht

ent-

enthalten sind, noch auch durch die bei grössern Winkeln anwendbare Proportion scharf genug gefunden werden können, so werden zu diesem Entzwecke die Logarithmen der Sinusse von der ersten Sekunde bis auf 32 Minuten, am Ende dieses Teiles beigefüget.

Fünftens, folget eine Anweisung zur Erfindung der Mittagslinie, oder vielmehr des Winkels, den sie mit derienigen Linie machet, so man sich von dem Beobachtungsorte nach einem beliebigen andern gezogen zu sein einbildet. Ob nun zwar diese Operation gewöhnlich nur bei grössern und weitschichtigern trigonometrischen Ausmessungen gebrauchet wird, und auch schon einige Kentnisse des Weltgebäudes, folglich der sphärischen Trigonometrie voraussetzet, so ist sie doch bei Aufnehmung eines beträchtlichen Stück Landes sehr wesentlich, und daher glaubte ich nicht unrecht zu tuhn, dieselbe mit so weniger Voraussetzung fremder Kentnisse als nur möglich, und mit so vieler Gründlichkeit als ohne denselben füglich geschehen kan, mit einfliessen zu lassen.

Sechstens: Nachdem nun die Anfänger durch die Auflösungen verschiedener, und am meisten vorkommender einzelner Fälle vorbereitet worden, wird ihnen eine kurze und algemeine Anleitung zur trigonometrischen Aufnehmung einer ganzen Gegend, oder Stück Landes gegeben, und mit einem Beispiele, so weit es die Enge des Raumes verstattet, die Erleuterung davon gemacht. Ob gleich die Vorfälle bei dergleichen Verrichtungen sehr veränderlich sind, und man fast niemals auf eine ganz gleichförmige Art dabey verfahren kan, so ist doch gar nicht zu zweifeln, daß derjenige, so sich diese Anleit ung wohl bekant gemacht, mit ei-

niger Ueberlegung sich auch in alle übrige Fälle leicht finden werde.

Siebentens, komt die Reduktion der berechneten Punkte auf die Mittagslinie vor. Man erhält dadurch den sehr wesentlichen Vorteil, daß man die Abstände der aufgenommenen Punkte von dem Orte, in welchen die Mittagslinie gefunden worden, und welche bald östlich oder westlich, bald nordlich oder sudlich sind, in eine ordentliche Tafel zusammen schreiben und daraus die würkliche Auftragung auf das zur Karten bestimte Papier nicht allein viel bequemer, und weniger irsam, sondern auch viel richtiger bewürken könne.

Achtens. Ob zwar die Hauptpunkte einer Gegend auf keine andere Art so richtig, als durch die Trigonometrie bestimmet werden können, so muß doch die volständige Zergliederung einer Situation und die Aufnehmung der darin enthaltenen Kleinigkeiten, oder das Detail unumgänglich durch das Mestischel, aus der Ursache geschehen, weil man die wahre Gestalt der vorkommenden Gegenstände so gleich an Ort und Stelle auszeichnen kan, und dadurch einer unsäglich mühsamen Berechnung durch die Trigonometrie ausweichet. Derowegen zeige ich den Gebrauch des Mestischels wieder in verschiedenen an meisten vorkommenden einfachen Fällen, und dann lehre ich, wie man sich bei Aufnehmung eines ganzen Stücklandes, so wohl wenn die Hauptpunkte zuvor trigonometrisch bestimmt worden, als auch ohne denselben überhaupt, zu benehmen habe. Da es aber sonderlich in Kriegszeiten öfters an der zum ordentlichen Aufnehmen mit dem Mestischel benöhtigten Zeit fehlet, oder anderer Umstände wegen es nicht wohl tuhnlich ist, mit demselben zu ope-

operiren, oder auch wohl die Umstände keine genaue Schärfe des Risses nohtwendig machen, so habe ich einige Anleitungen beigefüget, wie man in solchen Fällen ohne Instrumenten zu Werke gehen müsse. Jedoch werden dabei die vorhergehende Gründe von Aufnehmen unumgänglich vorausgesetzet.

Neuntens, lasse ich eine Abhandlung vom Nivelliren folgen, weil ich dafür nirgens anders einen schicksamern Plaz gefunden. Nachdem die ersten Gründe davon vorgetragen worden, werden die Eigenschaften, und die Beschaffenheit der nüzlichsten Nivellirwagen beschrieben, und ihre Berichtigung gewiesen, damit ein Anfänger, wenn sie ihm vor die Hände kommen, sich derselben zu bedienen wisse; und dann wird zu einigen einfachen, und zusammen gesezten Nivelliroperationen die nöhtige Anleitung gegeben. Uebrigens wil ich von der grossen Nuzbarkeit des Nivellirens nichts gedenken; iederman weiß, wie oft es überhaupt im gemeinen menschlichen Leben zu wissen nöhtig ist, um wie viel ein Ort höher sei als der andere.

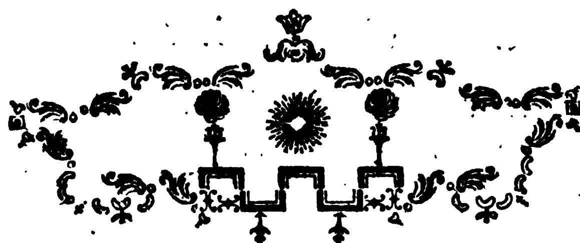
Zehentens, werden endlich einige Anwendungen der Geometrie auf die Artillerie und Minenwissenschaft gemacht. Ob zwar dem Gebrauche der Geometrie in beiden ein sehr weites Feld offen ist, so läst sich doch davon gegenwärtig noch nicht viel mehr anführen, weil damit meistens noch andere Wissenschaften sehr nahe verbunden sind, deren Kentnis dabei vorausgesezt werden mus.

Dieses ist also alles, was ich in gegenwärtigen Anfangsgründen der Geometrie vorzutragen für nohtwendig erachtet habe, und was eigentlich einem Kriegs-

manne

manne davon am nützlichsten scheint. Ich empfehle daher den Anfängern, so sich diese Gründe wahrhaft eigen machen wollen, nichts so sehr, als eine fleissige Uebung, so werden sie bei vielen Gelegenheiten mit ihrer erlernten Wissenschaft so wohl dem Staate die erspriesslichste Dienste zu leisten im Stande sein, als auch sich selbst den Weg zur Ehre bahnen.





Anfangsgründe der Geometrie.

Einleitung.

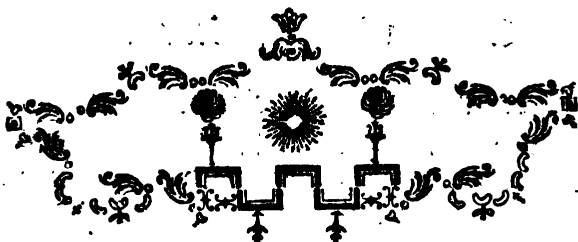
§. 1.

Alles was einen Raum einnimt, oder woran Teile ausser und neben einander vorhanden sind, folglich im eigentlichen Verstande zusammengesezet ist, und zerteilet werden kan, ist ausgedehnt, und die Erfüllung eines Raumes ist die Ausdehnung. Die Wissenschaft, die Grösse der Ausdehnung auszumessen, ist die Geometrie.

§. 2. Die erste Ausdehnung, so bey einem zusammengesezten Dinge gedacht wird, heist die Länge; kömt zu dieser noch eine andere hinzu, so ist es die Breite; und wenn mit

manne davon am nützlichsten scheint. Ich empfehle daher den Anfängern, so sich diese Gründe wahrhaft eigen machen wollen, nichts so sehr, als eine fleissige Uebung, so werden sie bei vielen Gelegenheiten mit ihrer erlernten Wissenschaft so wohl dem Staate die erspriesslichste Dienste zu leisten im Stande sein, als auch sich selbst den Weg zur Ehre bahnen.





Anfangsgründe der Geometrie.

Einleitung.

§. 1.

Alles was einen Raum einnimt, oder woran Teile ausser und neben einander vorhanden sind, folglich im eigentlichen Verstande zusammengesetzet ist, und zerteilet werden kan, ist ausgedehnt, und die Erfüllung eines Raumes ist die Ausdehnung. Die Wissenschaft, die Grösse der Ausdehnung auszumessen, ist die Geometrie.

§. 2. Die erste Ausdehnung, so bey einem zusammengesetzten Dinge gedacht wird, heist die Länge; komt zu dieser noch eine andere hinzu, so ist es die Breite; und wenn

mit diesen beiden noch eine dritte verbunden ist, so heist sie die **Dicke** (**Höhe** oder **Tieffe**). Jede dieser Ausdehnungen wird auch **Dimension** genennet.

Diese drei Dimensionen sind nicht wesentlich, sondern nur in der Vorstellungsart bei ihrer Verbindung miteinander unterschieden, so daß nach Erfordernis der Umstände die Länge auch vor die Breite oder Dicke, und umgekehrt, angesehen werden kan, ie nachdem man eine oder die andere davon vor die erste Dimension annimt. Eben so verhält es sich auch mit den drei Benennungen der dritten Dimension, nehmlich der **Dicke**, **Höhe** und **Tieffe**, so einerlei Ausdehnung bedeuten, und nur vermöge dem Sprachgebrauche nach Verschiedenheit der iedesmaligen äussern Umstände angewendet werden.

§. 3. Ein zusammengesetztes Ding, so nur in die Länge allein ausgedehnet ist, oder nur eine Dimension hat, ist eine **Linie** (linea, ein Strich); hat es zwo derselben, die Länge und die Breite, so ist es eine **Fläche** (superficies); und hat es endlich alle drei zusammen, Länge, Breite und Dicke, so ist es ein **Körper** (corpus, solidum).

In so weit bei dergleichen zusammengesetzten Dingen nichts anders als die blosse Ausdehnung gedacht wird, mit Ausschliessung aller übrigen Eigenschaften, entstehen daraus **mathematische Linien, Flächen** und **Körper**, welche daher von den physikalischen, bei welchen sich ausser der Ausdehnung noch andere Eigenschaften befinden, wohl unter-

unterschieden werden müssen. Es sind blosse abstrakte Begriffe, so von den in der Natur vorhandenen Körpern abgezogen werden, und nicht vor sich bestehen können, so wie auch in der Natur keine Fläche ohne Dicke, und keine Linen ohne einige Breite und Erhöhung oder Vertieffung anzutreffen sind.

§. 4. Die Gränzen der Ausdehnung bestimmen die **Gestalt** (Figura) des zusammengesetzten Dinges, so dadurch eingeschlossen wird, bei welchen demnach die dadurch eingeschränkte Dimension aufhören mus. Nun hat eine Linie nur eine einzige Dimension §. 3. folglich können die Gränzen davon keine Ausdehnung mehr besitzen, keinen Raum einnehmen, keine Teile ausser einander haben, und mussen also **unteilbar**, das ist, **mathematische Punkte** sein, das Ende oder der Anfang einer Linie. Auf eben diese Art können die Gränzen einer Fläche nur noch eine, und die Gränzen eines Körpers nur noch zwo Dimensionen haben, und daher müssen die ersten von Linien, die andern aber von Flächen umschränket und eingeschlossen sein.

Ein mathematischer Punkt, der eigentlich keine Grösse und Ausdehnung mehr besitzen sol, folglich an sich unsichtbar sein würde, kan eben so wenig durch die Sinne vorgestellet werden, als eine mathematische Linie und Fläche, und man ist daher genöhtiget, ihn in der Ausübung auf dem Papier

durch ein rundes Tüpflein, auf dem Felde aber durch einen Pflock oder etwas ähnliches abzubilden und vorzustellen, welches Bild dem Begriffe eines mathematischen Punktes desto näher komt, ie kleiner es ist. Da es aber doch auch nach Umständen gehörig merklich und sichtbar sein mus, so komt es hiebei nicht so wohl auf die wirkliche als vielmehr auf die scheinbare Grösse nach Maasgebung der Entfernung an, und daher mus man öfters einen Thurn, oder eine ganze Stadt, ia auch wohl einen Stern und Weltkörper selbst vor einen blossen Punkt annehmen. Eben so wird auch eine Linie auf dem Papiere durch einen dünnen Strich, und auf dem Felde durch eine schmale und seichte Vertieffung, durch eine ausgespante Schnur, u. s. w. vorgestellet, ob man gleich niemals eine blosse Länge ohne alle Breite und Dicke abzubilden vermögend ist.

Weil die Gränze und der Anfang einer Linie der Punkt ist, einer Fläche die Linie, und eines Körpers die Fläche, so kan auch die Entstehungsart dieser drei Ausdehnungen durch die Bewegung der ersten, von welcher sie erzeuget werden, vorgestellet werden. Wenn man sich demnach einbildet,
Fig. 1. daß sich ein Punkt von seiner Stelle A nach B beweget, so wird diese Richtung oder der Weg den er beschreibet, so nur eine Ausdehnung nach der blossen Länge haben kan, eine Linie. Ferner, be-
Fig. 2. weget sich eine Linie AB aus ihrer Lage nach einer neuen Dimension, oder nach CD, so entspringen zwo Dimensionen, folglich die Fläche ABCD.
Fig. 3. Und endlich wenn sich eine Fläche ABCD von ihrer Stelle nach einer dritten Dimension beweget,

so

so daß sie den Raum EFGH einnimt, so entstehen daraus drei Dimensionen des Raumes, folglich ein mathematischer Körper.

§. 5. Da bei einer ieden Ausmessung das Maas von einerlei Art mit der auszumessenden Grösse sein sol, §. 2. Rechenk. so muß auch die Ausmessung der Dimensionen in der Geometrie iedesmal eine Ausdehnung von eben der Art zum Maasstabe angenommen werden. Folglich werden Linien durch eine Linie, Flächen durch eine Fläche, und Körper durch einen Körper ausgemessen, woraus denn ein dreifaches geometrisches Maas entspringet, nehmlich: bei den Linien das Längenmaas (Current-Maas), bei den Flächen das Flächenmaas (Quadrat-Maas), und bei den Körpern das körperliche Maas (Cubik-Maas).

§. 6. Die Geometrie handelt

I. In dem theoretischen Teile.
- A. Von den ersten Gründen der Geometrie. Erster Abschnit, und zwar
  - a. Von den ersten Erklärungen. Erstes Hauptstück.
  - b. Von den Winkeln. Zweites Hauptst.
  - c. Von den ersten Lehrsätzen der Dreiecke. Drittes Hauptstück.
- B. Von den Linien. Zweiter Abschnit.
  - a. Von der graden Linie, und zwar

1. Ueberhaupt; von Ausmessung der geraden Linie. Erstes Hauptstück.
2. Insbesondere
α. Von der senkrechten und schrähen Linie. Zweites Hauptstück.
β. Von den Parallellinien. Drittes Hauptstück.
b. Von der Kreislinie und ihren Eigenschaften. Viertes Hauptstück.
c. Von dem Umkreise und den Winkeln der geradlinigten Flächen und Vielecken, insbesondere der Dreiecken. Fünftes Hauptstück.
d. Von dem Umkreise und den Winkeln der übrigen Vielecke. Sechstes Hauptst.
e. Von Proportionallinien. Siebentes Hauptstück.

C. Von den Flächen. Dritter Abschnit.
a. Von der Aehnlichkeit der geradlinigten Flächen. Erstes Hauptstück.
b. Von der Gleichheit der geradlinigten Flächen und ihrer Ausmessung, nehmlich
1. Der Parallelogrammen und Dreiecken. Zweites Hauptstück.
2. Der Vielecken. Drittes Hauptst.
c. Von der Zirkelfläche. Viertes Hauptstück.
d. Von Berechnung des Flächen-Inhalts und dem Toisiren. Fünftes Hauptst.

D. Von

D. Von den Körpern. Vierter Abschnit.
a. Ueberhaupt. Erstes Hauptstück.
b. Insbesondere.
1. Von den Prismen und Cylindern. Zweites Hauptstück.
2. Von den Pyramiden und Kegeln. Drittes Hauptstück.
3. Von der Kugel. Viertes Hauptst.
4. Von Berechnung des körperlichen Inhalts. Fünftes Hauptstück.
E. Von den Kegelschnitten. Fünfter Abschnit.
a. Von der Parabel. Erstes Hauptstück.
b. Von der Ellypse. Zweites Hauptst.
c. Von der Hyperbel. Drittes Hauptst.
II. In dem praktischen Teile.
A. Von der geradlinigten Trigonometrie. Erster Abschnit.
a. Ueberhaupt, samt den Sinustafeln und ihrem Gebrauche. Erstes Hauptstück.
b. Insbesondere.
1. Von Auflösung rechtwinkelichter Dreiecke. Zweites Hauptstück.
2. Von Auflösung schiefwinkelichter Dreiecke. Drittes Hauptstück.
B. Von würklichen trigonometrischen Abmessungen. Zweiter Abschnit.
a. Von den Instrumenten zum Winkelmessen. Erstes Hauptstück.

b. Von Prüfung und Berichtigung derselben. Zweites Hauptstück.

c. Von einfachen und zusammengesetzten trigonometrischen Aufgaben. Drittes Hauptstück.

C. Vom Aufnehmen mit dem Meßtischel. Dritter Abschnitt.

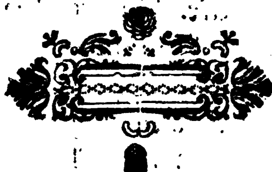
D. Vom Nivelliren. Vierter Abschnitt.

a. Von den Gründen des Nivellirens. Erstes Hauptstück.

b. Von den Nivellir-Instrumenten Zweites Hauptstück.

c. Von würklichen Nivellirungen. Drittes Hauptstück.

III. In einem Anhange; Von den vornehmsten Anwendungen der Geometrie zu verschiedenen Aufgaben in der Artillerie und Minierkunst.



Theo-

Theoretischer Teil der Geometrie.

Erster Abschnit, Von den ersten Gründen der Geometrie.

Erstes Hauptstück. Von den ersten Erklärungen.

§. 7.

Die kürzeste Linie zwischen zween Punkte AB, ist gerade (linea recta), und dieienige, so nicht die kürzeste ist, ACB oder ADB, ist krum (linea curva). Diese gerade Linie zwischen zween Punkte ist ihre Entfernung von einander (Weite, Abstand, distantia). Fig. 4.

Im algemeinem Verstande und überhaupt wird eine iede Linie krum genennet, wenn sie nicht die kürzeste zwischen zween Endpunkten ist, insbesondere aber und im engsten Verstande ist es nur die-

ienige, so nicht aus geraden Linien zusammengesetzet ist, oder wovon kein Teil eine gerade Linie ist.

Leitet man den Begrif der Ausdehnungen aus der §. 4. angezeigten Erzeugungsart durch die Bewegung ihrer Gränzen her, so entstehet eine gerade Linie, wenn sich ein Punkt nach einer einzigen ununterbrochenen Richtung beweget, folglich weder auf die eine noch die andere Seite ausweichet, und immer ein Punkt der Linie alle folgende, so man darin annehmen kan, bedeckt. Das Gegenteil geschiehet bei einer krumen Linie. Wenn bei der leztern die Veränderung der Richtung nicht mit Absäzen und plözlich, sondern unaufhörlich und unmerklich geschieht, so ist es eine krumme Linie im engsten Verstande.

Zusaz.

§. 8. Es kan demnach zwischen zween Punkten nur eine gerade, aber unzählige krumme geben, und die erstere ist durch zween Punkte, so in derselben gegeben sind, vollkommen bestimmet, und kan nach Belieben verlängert werden, zu der andern aber werden mehrere erfordert.

Diese krumme Linien können überhaupt in eine doppelte Gattung eingeteilet werden, nehmlich in regulaire und irregulaire. Wird nehmlich die Veränderung ihrer Richtung durchgängig nach einerlei Gesezen bestimmet, so sind sie regulair, ist dieses aber nicht, so sind sie irregulair. Von der ersten giebt es wieder verschiedene Arten, die Anzahl der leztern aber ist unendlich. In den Gegen-

gegenwärtigen Anfangsgründen der Geometrie wird in Absicht auf die regulairen nur von der Kreislinie, und bei den Kegelschnitten noch von einigen andern Arten so daraus entstehen, gehandelt werden. Die übrigen gehören zur höhern Geometrie.

Erklärung.

§. 9. Die kürzeste Fläche zwischen zwoen Linien ist eine **gerade Fläche** (Ebene, superficies plana), und dieienige so nicht die kürzeste, ist eine **krumme Fläche**.

Oder auch: eine ebene Fläche ist, innerhalb welcher zwischen iede darin angenommene zween Punkte eine gerade Linie gezogen werden kan, eine krumme aber, wo das Gegenteil staat findet, oder worin kein Teil der eben wäre, anzutreffen ist.

Zusatz.

§. 10. Weil zwischen zween Punkten nur eine gerade Linie sein kan, §. 8. und zwo gerade Linien, wenn sie eine Fläche einschliessen solten, einerlei Endpunkte haben müsten, so kan aus denselben niemals mehr als eine Dimension entstehen, folglich können sie auch keinen Raum einschliessen, sondern es werden wenigstens drei dazu erfordert; da im Gegenteil eine einzige krumme Linie gar wohl eine Fläche einschliessen kan. Eben so kan auch kein Körper durch zwo ebene Flächen, aber wohl durch eine einzige krumme Fläche umschlossen werden. Figuren und Flächen, so

von

von geraden Linien eingeschlossen werden, heissen geradlinigt, und wenn solches von krummen Linien geschieht, so werden sie krumlinigt genennet.

Erklärung.

§. 11. Ausdehnungen von einerlei Grösse sind einander gleich, §. 4. Rechenk. sind ausser der Grösse alle übrige Merkmale in ihnen anzutreffen, oder können sie durch nichts als etwan durch die Grösse allein von einander unterschieden werden, so sind sie ähnlich; folglich können Ausdehnungen und Figuren zwar gleich aber unähnlich, und umgekehrt, zwar ähnlich, aber ungleich sein. Ausdehnungen von einer Art, oder von einerlei Merkmalen, deren Gränzen einerlei sind, oder auf einander fallen, decken einander (congruere); und da sie so wohl einerlei Grösse haben, als auch in allen übrigen Merkmalen mit einander übereinstimmen, so sind sie so wohl gleich als ähnlich. Hieraus folget 1. daß alle gerade Linien, deren Endpunkte einerlei sind, oder auf einander fallen, sich decken, und folglich gleich sind. 2. Alle gerade Flächen und Figuren, deren einschliessende Linien auf einander fallen, decken sich, und sind gleich und ähnlich; und endlich 3. Körper, deren umgränzende Flächen einerlei sind, und auf ein-

einander fallen, füllen sich einander aus, und sind gleich und ähnlich.

Weil zu dem Begriffe des Deckens erfordert wird, daß die Ausdehnung in aller Absicht von einerlei Art sein müsse, so können gerade Linien nur gerade und krumme Linien nur krumme decken, aber nicht wechselsweise. Bei den leztern ist es nicht genug, daß die Endpunkte auf einander fallen, sondern da sie von gar verschiedener Gattung sein können, so müssen auch alle übrige nachfolgende Punkte auf einander fallen, oder nach einerlei Gesetze bestimmet werden. Eben so verhält es sich auch mit den geraden oder ebenen, und mit den krummen Flächen. Man kan schliessen: alle Ausdehnungen so sich einander decken, sind gleich, aber nicht umgekehrt: wenn sie gleich sind, so decken sie einander, und in dieser Absicht giebt es Linien, Flächen und Körper, so zwar gleich sind, aber dem ohnerachtet sich nicht decken, weil ihnen die Aehnlichkeit fehlet, wovon der Begrif an seinem Orte noch näher und vollständiger wird ausgeführet werden.

Erklärung.

§. 12. Eine sich selbst schliessende krumme Linie, so von einem unbeweglichen Punkte allezeit einerlei Entfernung behält, oder, welche entstehet, wenn sich eine Linie AB um den festen Endpunkt A beweget, bis sie wieder in ihre vorige Lage komt; heist ein **Kreis** (circulus). In demselben ist 1. die durch den Punkt B beschriebene krumme Linie selbst der Fig. 5.

Um-

Umkreis (die Kreislinie, peripheria, circumferentia); und die dadurch begränzte Fläche die Kreisfläche. 2. Der unbewegliche Punkt A der Mittelpunkt (centrum). 3. Jede gerade Linie, so von dem Mittelpunkte bis an den Umkreis gezogen wird, wie AB, AC oder AL, das ist, die Entfernung des Mittelpunkts von dem Umkreise, der Halbmesser (Radius). 4. Jede gerade Linie EB, so von einem Punkte des Umkreises bis zum andern durch den Mittelpunkt gezogen wird, der Durchmesser (Diameter), und 5. wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehet, wie DC oder LI, eine Sehne (chorda). Endlich 6. ieder Teil des Umkreises, so von einer Sehne oder zween Halbmessern abgeschnitten wird, ein Bogen (arcus) des Kreises.

Zusatz.

§. 13. Aus den vorhergehenden Erklärungen fliessen nachgesezte Folgerungen:

1. Weil in einem Kreise die Entfernungen des Umkreises von dem Mittelpunkte gleich sein müssen, so sind alle Halbmesser desselben einander gleich.

2. Da ein ieder Durchmesser aus zween Radien bestehet, oder ein doppelter Radius ist, so sind auch diese in einem Zirkel einander gleich.

3.

3. Eine Kreislinie wird blos durch den Radius, oder durch die Gleichheit der Entfernung vom Mittelpunkte bestimmet; folglich haben alle Kreislinien einerlei Eigenschaften und Merkmale, ausser etwan die Grösse, so von der Länge des Radius abhänget; folglich sind alle Kreislinien einander ähnlich §. 11.

4. Wenn in zween oder mehrern Kreisen die Halbmesser oder Durchmesser gleich sind, so decken diese leztere einander, und die Endpunkte der einen fallen auf die Endpunkte der andern, folglich fallen auch alle Punkte des einen Umkreises auf die Punkte des andern, und die Kreise so wohl als die dadurch eingeschlossene Flächen decken einander und sind gleich §. 11. Desgleichen umgekehrt: wenn die Kreise gleich sind, so sind auch die Radien und Durchmesser einander gleich.

5. Ferner: Bögen, so von einem oder mehrern von gleichen Radien beschriebenen Kreisen durch gleiche Sehnen abgeschnitten werden, decken sich, und sind einander gleich. Daher können zween mit gleichen Halbmessern beschriebene Bögen einander gleich gemacht werden, wenn man sie durch gleiche Sehnen abschneidet.

6. Je grösser die Sehne eines Zirkels, desto grösser ist auch ihr Bogen, und umgekehrt.

7.

Umkreis (die Kreislinie, peripheria, circumferentia); und die dadurch begränzte Fläche die Kreisfläche. 2. Der unbewegliche Punkt A der Mittelpunkt (centrum). 3. Jede gerade Linie, so von dem Mittelpunkte bis an den Umkreis gezogen wird, wie AB, AC oder AL, das ist, die Entfernung des Mittelpunkts von dem Umkreise, der Halbmesser (Radius). 4. Jede gerade Linie EB, so von einem Punkte des Umkreises bis zum andern durch den Mittelpunkt gezogen wird, der Durchmesser (Diameter), und 5. wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehet, wie DC oder LI, eine Sehne (chorda). Endlich 6. ieder Teil des Umkreises, so von einer Sehne oder zween Halbmessern abgeschnitten wird, ein Bogen (arcus) des Kreises.

Zusatz.

§. 13. Aus den vorhergehenden Erklärungen fliessen nachgesezte Folgerungen:

1. Weil in einem Kreise die Entfernungen des Umkreises von dem Mittelpunkte gleich sein müssen, so sind alle Halbmesser desselben einander gleich.

2. Da ein ieder Durchmesser aus zween Radien bestehet, oder ein doppelter Radius ist, so sind auch diese in einem Zirkel einander gleich.

3.

3. Eine Kreislinie wird blos durch den Radius, oder durch die Gleichheit der Entfernung vom Mittelpunkte bestimmet; folglich haben alle Kreislinien einerlei Eigenschaften und Merkmale, ausser etwan die Grösse, so von der Länge des Radius abhänget; folglich sind alle Kreislinien einander ähnlich §. 11.

4. Wenn in zween oder mehrern Kreisen die Halbmesser oder Durchmesser gleich sind, so decken diese leztere einander, und die Endpunkte der einen fallen auf die Endpunkte der andern, folglich fallen auch alle Punkte des einen Umkreises auf die Punkte des andern, und die Kreise so wohl als die dadurch eingeschlossene Flächen decken einander und sind gleich §. 11. Desgleichen umgekehrt: wenn die Kreise gleich sind, so sind auch die Radien und Durchmesser einander gleich.

5. Ferner: Bögen, so von einem oder mehrern von gleichen Radien beschriebenen Kreisen durch gleiche Sehnen abgeschnitten werden, decken sich, und sind einander gleich. Daher können zween mit gleichen Halbmessern beschriebene Bögen einander gleich gemacht werden, wenn man sie durch gleiche Sehnen abschneidet.

6. Je grösser die Sehne eines Zirkels, desto grösser ist auch ihr Bogen, und umgekehrt.

7.

7. Wenn die durch den Diameter abgeschnittene Bögen eines Kreises, ENB und EMB, auf einander geleget werden, so müssen, wegen der Gleichheit der Halbmesser alle Punkte des einen auf die Punkte des andern fallen, folglich decken sie einander und sind einander gleich §. 11. d. i. der Diameter teilet den Kreis in zween gleiche Teile.

Willkührlicher Saz.

§. 14. Der Umkreis eines ieden Zirkels, er mag von einem grossen oder kleinem Durchmesser sein, wird in 360 gleiche Teile, so Grade genennet werden, eingeteilet. Jeder derselben bekomt von neuen 60 Teile, so **Minuten** (minutum primum), und iede Minuten 60 andere Teile, so **Sekunden** (minutum secundum) u. s. w. genennet werden.

Diese Einteilung des Zirkels ist willkührlich, und von alten Zeiten her wegen einiger dabei bemerkten Bequemlichkeit eingeführet worden, weswegen auch in einigen besondern Fällen, wo gleichfals eine Einteilung des Umkreises nöhtig ist, wie z. B. in dem Bergbau und in der Markscheidekunst, der Zirkel nicht in 360 Grade, sondern in 24 Stunden eingeteilet wird.

Wil man diese verschiedene Teile in Zahlen ausdrücken, so sezet man über die Ziffer der Grade zur Rechten das Zeichen (°) über die Minuten (′) und über die Sekunden (″), um sie so gleich von einander zu unterscheiden. Z. B. 35°, 18′, 42″.

Zu-

Zusatz.

§. 15. Es hat also ein grösserer Zirkel zwar grössere, aber nicht mehrere Grade, als ein kleinerer, und eben dieses verstehet sich auch von ähnlichen und proportionirten Bögen, so von diesen Zirkeln abgeschnitten werden. Daher können zween Bögen von verschiedenen Radien gar wohl an der Anzahl ihrer enthaltenen Graden gleich sein, ohnerachtet sie sonst an ihrer würklichen Grösse weit von einander unterschieden sind. Ueberhaupt aber kan man sagen, daß zween Bögen FG und DE, so aus einem Mittelpunkte A, mit verschiedenen Radien AF und AD gezogen werden, und zwischen eben denselben eingeschlossen sind, folglich ähnliche Teile der ganzen Zirkel werden, auch an der Anzahl der Graden einander gleich sein müssen. Fig. 6.

Aufgabe.

§. 16. Einen Kreis zu ziehen.

Auflösung. 1. Auf dem Papier oder andern kleinen Fläche geschiehet solches vermittelst eines besonders dazu bestimten Werkzeuges.

2. Auf dem Felde, oder einer grössern Fläche, wird in den gegebenen Mittelpunkt A ein Pflock oder Stift eingeschlagen, eine Schnur von gegebener Länge des Halbmes- Fig. 7.

sers daran befestiget, wohl angespannet, und mit dem andern gleichfals mit einem Stifte versehenen Ende derselben der Umkreis bezeichnet. §. 12.

Zweites Hauptstück.

Von den Winkeln.

Erklärung.

§. 17.

Fig. 6. Wenn zwo gerade Linien, wie AB und AC sich an ihren Endpunkten berühren, so wird 1. die Neigung derselben gegen einander ein **Winkel** (ein Ecke, angulus); 2. die zwo Linien selbst die **Schenkel** (crura), und 3. der Berührungspunkt A der **Scheitel** (Spitze vertex) desselben genennet.

Wenn man in den mathematischen Schriften einen Winkel andeuten wil, so geschiehet es mehrenteils mit drei Buchstaben, wovon der mitlere die Spitze des Winkels bezeichnet, wie z. B. CAB oder BAC. Bisweilen, wenn keine Irrung daraus zu besorgen ist, wird auch nur der mitlere A allein gesetzet, oder auch wohl ein kleiner Buchstabe zwischen den Schenkeln des Winkels, so angedeutet werden sol, gestellet.

Zu-

Zusatz.

§. 18. Weil ein Winkel in der Neigung zwoer Linien bestehet, so wird die Grösse desselben nicht durch die Länge der Schenkel, sondern blos durch die weitere oder engere Oefnung derselben bestimmet. Wenn man demnach den Scheitel des Winkels zum Mittelpunkt eines Zirkels, und die Schenkel zu Halbmessern davon annimt, so sind alle mögliche Oefnungen und Neigungen der Schenkel, folglich alle mögliche Winkel, so sie machen können, in dem Umkreise enthalten, und ie grösser der zwischen ihnen begriffene Teil des Umkreises ist, desto grösser ist der Winkel. Deswegen ist der aus der Spitze A mit was immer für einem Halbmesser zwischen den Schenkeln beschriebene Bogen ED oder FG, oder vielmehr, das Verhältnis desselben zu dem ganzen Umkreise, folglich die Anzahl der enthaltenen Grade, das **Maas des Winkels.** Fig. 6.

An sich ist es demnach zwar allezeit einerlei, ob man sich zu Messung eines Winkels eines Bogens von einem grossen oder kleinem Halbmesser bedienet, da beide nohtwendig einerlei Verhältnis zu ihrem ganzen Umkreise haben, folglich eine gleiche Anzahl Grade enthalten müssen; iedoch da auf dem erstern die Grade samt den kleinern Teilen viel deutlicher und empfindlicher ausfallen müssen, als auf dem andern, so ist es in der Ausübung allezeit rathsam, einen Winkel mit einem Bogen von einem

so grossen Halbmesser zu messen, als die Umstände nur immer erlauben; nach welchem Grunde zugleich auch die Güte und Brauchbarkeit mancher mathematischer Werkzeuge zu beurteilen.

Zusatz.

§. 19. Da demnach die Grösse der Winkel blos von der Oefnung der Schenkel abhanget, so sind sie einander gleich, wenn ihre Schenkel auf einander fallen, und alsdann decken sich die Winkel, ohnerachtet die Schenkel sich nicht einander decken.

Erklärung.

§. 20. Aus der verschiedenen Anzahl Grade, so der Winkel enthalten kann, entstehen dreierlei Hauptgattungen derselben, nehmlich: 1. Der Winkel, dessen Bogen genau der vierte Teil des ganzen Umkreises ist, oder 90° hat, ist ein **rechter Winkel**, und verbleibet folglich allezeit unveränderlich. 2. Ein ieder Winkel, dessen Bogen mehr als 90° enthält, wird **stumpf**, und 3. wenn er weniger, als 90° hat, **spitzig** genennet. Beide können ihre Anzahl Grade unendlich oft verändern, d. i. bald mehr, bald weniger, stumpf oder spitzig sein.

Lehrsatz.

§. 21. Wenn der eine Schenkel eines Winkels verlängert wird, so machen beyde daraus
Fig. 8. entstehende **Nebenwinkel** CAB und CAD, zusammen 180° aus.

Be-

Beweis. Ziehet aus der gemeinschaftlichen Spitze A mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen HEI, so ist solcher ein halber Umkreis, §. 13. N. 7. und enthält 180° §. 14. Nun ist der Bogen IG das Maas des Winkels CAB, und der Bogen HG das Maas des Winkels CAD §. 18. Folglich machen beide Winkel CAB und CAD zusammen 180° oder zween rechte Winkel.

Zusatz.

§. 22. Eben so kan man auch umgekehrt sagen: Wenn zween Winkel BAC und CAD, so einen Schenkel CA mit einander gemein haben, zusammen 180° ausmachen, so liegen die beyde andere Schenkel AB und AD in einer geraden Linie. Denn man nehme das Gegenteil an, so kan die Linie BA verlängert werden, z. B. durch AE. Alsdann sind die Winkel BAC + CAE = 180° §. 21. Nun sind auch, vermöge der angenommenen Bedingung BAC + CAD = 180°; folglich CAE = CAD. welches ungereimt. Daher mus die Linie AE nohtwendig auf AD fallen, und AB + AD liegen in gerader Linie. Fig. 9.

Erklärung.

§. 23. Der Nebenwinkel, so einem Winkel noch auf 180° abgehet, heist der **Ergänzungswinkel** (das Supplement) des letztern,

tern, d. i. der Winkel CAB ist das Supplement des Winkels CAD, und umgekehrt.

Zusatz.

§. 24. Hieraus werden nachgehende Folgerungen gezogen: 1. Gleiche Winkel haben also gleiche Supplemente, und umgekehrt: wenn zween oder mehrere Winkel gleiche Supplemente haben, so sind sie einander gleich.

2. Wenn sich also zwo Linien DC und BE durchschneiden, so sind die sich entgegenstehen-
Fig. 10. de Scheidelwinkel (Vertikalwinkel) d. i. deren beide Schenkel in gerader Linie liegen, nehmlich BAC und DAE, wie auch DAB und CAE, einander gleich; weil die beide erstern das gemeinschaftliche, folglich gleiche Supplement DAB, und die beide andern das Supplement BAC haben.

3. Wenn man einen von den vier Winkeln, so von zwo sich durchschneidenden Linien gemacht werden, kennet, so kan man auch unmittelbar die übrigen finden. Denn man darf nur den bekanten Winkel BAC von 180° abziehen, um sein Supplement BAD zu haben; und da ferner BAC = DAE, und BAD = CAE, N. 2. so sind alle vier Winkel bekannt.

4. Weil der rechte Winkel EAB allezeit
Fig. 8. 90° halten mus, §. 20. dieses aber die Hälfte von 180° ist, so ist ihm sein Supplement gleich;

gleich; folglich ist die Neigung des Schenkels EA auf beyden Seiten gleich, oder er hänget auf keine Seite mehr als auf die andere.

5. Alle Winkel, so um einen Punkt O, der ihre gemeinschaftliche Spitze ist, herum liegen, können zusammengenommen weder mehr noch weniger als 360° ausmachen, weil das gesamte Maas derselben ein ganzer Umkreis des Zirkels ist; Fig. 11.

6. Daher können auch um einen Punkt herum nur vier rechte Winkel liegen, da ein ieder derselben 90°, folglich den vierten Teil des Umkreises enthält.

Erklärungen.

§. 25. Das Complement eines Winkels auf 90° heist derienige, so einen spitzigen auf 90° abgehet, und bei einem stumpfen darüber ist. So ist der Winkel COE das Complement des spitzigen Winkels EOB, und FOC das Complement von dem stumpfen FOB. Fig. 11.

Zusatz.

§. 26. 1. Man findet also das Complement eines spitzigen Winkels, wenn man ihn von 90°, und eines stumpfen, wenn man von ihm 90° abziehet.

2. Gleiche Winkel haben gleiche Complemente, und wenn einige stumpfe oder auch spitzige Winkel gleiche Complemente haben, so sind sie iedesmal unter einander gleich.

Aufgabe.

Fig. 12. §. 27. Einen Winkel einem andern gegebenen CAB gleich zu machen.

Auflösung. 1. Ziehet eine unbestimte gerade Linie DE.

2. Aus der Spitze des gegebenen Winkels A machet mit beliebiger Eröfnung des Zirkels zwischen dessen Schenkeln einen Bogen CB; und mit eben dieser Eröfnung ziehet auf der angenommenen Linie aus dem Punkte D, so der Scheitelpunkt des neuen Winkels werden sol, den Bogen Ei.

3. Nehmet mit dem Zirkel die Grösse der Sehne BC, und traget sie aus E in F. Endlich

4. Ziehet durch die Punkte D und F eine gerade Linie, so müssen die beide Winkel FDE und CAB, weil ihre Bögen von gleichen Sehnen abgeschnitten worden, einander gleich sein. §. 13. N. 5.

Wie hierbey auf dem Felde zu verfahren, wird im folgenden an seinem Orte gezeiget werden.

Zusatz.

§. 28. Um auf dem Papier einen Winkel, von einer gegebenen Anzahl Grade zu zeichnen, bedienet man sich eines eigenen Werkzeuges, so aus einem von Messing, oder durchsichtigen Horn verfertigten, und in 180° abgeteilten halben Zirkel bestehet, und Winkelmesser

Fig. 13.

messer (Rapporteur, Transporteur) genennet wird. Wil man vermittelst desselben einen Winkel abstechen, so ziehet man eine Linie AB; leget den Durchmesser des Winkelmessers EB dergestalt darauf, daß sein Mittelpunkt an dem Orte zu liegen komme, wo die Spitze des Winkels sein sol; sticht alsdann bei dem verlangtem Grade an dem Umkreise einen Punkt in das Papier, und ziehet endlich durch denselben und durch den Punkt A eine gerade Linie AC, welche den andern Schenkel des Winkels abgiebt.

Auf eben diese Art wird auch verfahren, wenn man die Grade eines gegebenen Winkels auf dem Papier abmessen wil.

Drittes Hauptstück.

Von den ersten Lehrsätzen von der Gleichheit der Dreiecke.

Erklärung.

§. 29.

Eine Fläche, so von dreien Linien, so die Seiten (latera) desselben genennet werden, eingeschlossen ist, heist ein Dreieck (triangulum);

und da diese Linien so wohl gerade, als krum, und gemischt sein können, so wird auch das davon beschriebene Dreieck entweder geradlinicht, oder krumlinicht, oder auch gemischt genennet. Von den ersten wird alhier allein gehandelt.

Zusatz.

§. 30. Weil zwo gerade Linien keine Fläche einschliessen können, §. 10. so machen auch iede zwo Seiten eines geradelinichten Dreieckes zusammen betrachtet keine gerade, sondern eine krumme Linie aus, und müssen folglich zusammen genommen allezeit länger sein, als die dritte Seite. §. 7.

Erkärung.

§. 31. Da in einem ieden Dreiecke drei Winkel und drei Seiten angetroffen werden, so auf mancherlei Art verändert und bestimmet werden können, so giebt es so wohl in Ansehung der erstern als der letztern, verschiedene Gattungen derselben, nehmlich

In Ansehung der Seiten, ist ein Dreieck 1. gleichseitig, wenn alle drei Seiten von gleicher Länge sind. 2. gleichschenklicht, wenn nur zwo Seiten einander gleich sind, und 3. ungleichseitig, wenn alle drei Seiten von verschiedener Länge sind.

In

In Ansehung der Winkel ist ein Dreieck 1. **Spitzwinkelicht**, wenn alle drei Winkel spitzig sind, 2. **rechtwinkelicht**, wenn ein rechter Winkel sich darunter befindet, und 3. **stumpfwinkelicht**, wenn einer von den Winkeln stumpf ist. In dem rechtwinkelichtem Dreiecke wird noch insbesondere die Seite, so dem rechten Winkel gegen über stehet, die **Hypothenuse**, die beide andere Seiten aber, so den rechten Winkel einschliesssen, die **Catheten** genennet.

Daß es in einem Dreiecke nicht mehr, als einen rechten, oder einen stumpfen Winkel geben könne, folglich, daß also auch in Absicht auf die Winkel nicht mehr als die drei erwähnte Gattungen möglich sind, wird in dem folgenden erwiesen werden.

Erklärung.

§. 32. Dieienige Seiten zwoer Figuren von einer Art, an deren Endpunkten einerlei Winkel liegen, heissen **gleichnahmigt** (latera homologa); und auf eben diese Art sind dieienige Winkel zwoer Figuren gleichnahmigt, welche zwar nicht allemal von gleichen, aber doch von verglichenen und in Verhältnis stehenden Seiten eingeschlossen werden.

Lehrsatz.

§. 33. Wenn in zwei Dreiecken zwo Seiten mit dem eingeschlossenem Winkel einander

gleich

gleich sind, so sind beide Dreiecke einander gleich und ähnlich, und die gleichnahmige Teile derselben, so wohl Seiten als Winkel, sind einander gleich; das ist, wenn AC = ac, AB = ab, und A = a, so ist das Dreieck
Fig. 14. ABC ≌ abc, und BC = bc, B = b, C = c,

Beweis. Es werde das Dreieck abc auf ABC geleget, so daß der Winkel a auf A zu liegen komme. Da nun diese beide Winkel, vermöge der Voraussetzung, gleich sind, so decken sie einander, und die Schenkel ab fält auf AB, wie auch ac auf AC. §. 19. Da nun auch diese benante Linien einander gleich angenommen werden, so müssen sie sich gleichfals decken, §. 11. und folglich fällt der Punkt b auf B, und der Punkt c auf C, folglich fallen auch die Endpunkte der dritten Seiten bc und BC auf einander, welche sich also auch gegenseitig decken, und folglich gleich sein müssen. Es fallen demnach die einschliessende Linien der beiden Dreiecke auf einander, welche also gleich und ähnlich sein müssen. §. 11. Aus eben diesem Grunde des Deckens sind auch die Winkel b = B und c = C.

Diese Dreiecke von erwähnten Eigenschaften sind demnach iederzeit einerlei, und nur an verschiedene Orte gestellet, und hieraus fliesset die algemeine Folge: daß zwo Seiten mit dem dazwischen begriffenem Winkel ein Dreieck volständig bestimmen,

oder

oder aus diesen gegebenen dreien Teilen nur ein Dreieck gemacht werden könne.

Lehrsatz.

§. 34. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln einander gleich sind, so sind abermals beide Dreiecke gleich und ähnlich, und die übrige gleichnahmige Teile einander gleich; d. i. wenn AB = ab, A = a und B = b, so ist △ABC ≌ △abc, und AC = ac, BC = bc, C = c.

Beweis. Es werde die Seite ab auf AB geleget, so müssen, wegen ihrer Gleichheit, die Punkte a auf A, und b auf B fallen; da ferner auch die Winkel A = a, und B = b, so müssen ihre Schenkel ac auf AC, und bc auf BC fallen, und der Punkt c mus in beiden Linien AC und BC zugleich, folglich nirgends anders als in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte C anzutreffen sein; daher decken sich so wohl die gleichnahmige Seiten ac = AC, und bc = BC, als auch der Winkel c = C. Und da wiederum die umschliessende Linien beider Dreiecke auf einander fallen, so sind sie gleich und ähnlich. §. 11.

Eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln bestimmen also wiederum das Dreieck, und aus diesen gegebenen dreien Teilen kan nur ein Dreieck gemacht werden.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 35. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten einander gleich sind, so sind beide Dreiecke einander gleich und ähnlich, und auch die gleichnahmige Winkel derselben sind gleich; d. i. wenn AB = ab, AC = ac und BC = bc, so ist △ABC ≌ △abc, und A = a, B = b, C = c.

Beweis. Man lege wiederum beide Dreiecke so auf einander, daß ab auf AB zu liegen komme, welche sich einander decken; weil nun ac = AC und bc = BC, so mus der Endpunkt c an einen Ort fallen, der auch der gemeinschaftliche Endpunkt der beiden Linien AC und BC ist, folglich in C. Dahero fallen abermals die umschliessende Linien der Dreiecke auf einander, und sie sind einander gleich und ähnlich. §. 11. Da auch die Schenkel der gleichnahmigen Winkel auf einander fallen, so decken sich die Winkel, und sind folglich gleich. §. 19.

Folglich wird ein Dreieck durch die drei gegebene Seiten bestimmet, und kan nur eines und eben dasselbe daraus beschrieben werden.

Da zwei Dreiecke zwar in der Grösse gleich, aber sehr unähnlich, und umgekehrt, zwar ähnlich, aber ganz ungleich sein können, so werden die dahin gehörige Sätze im folgenden umständlich gelehret werden. Die gegenwärtige drei Lehrsätze aber haben alhie ausgeführet werden müssen, weil sie

bei

bei den meisten geometrischen Demonstrationen zum Grunde liegen, und dis dahin gehörige Figuren mehrenteils in Dreiecke zerleget werden, ausser welchen schon vom Euklides gebahnten Weg das Ziel entweder gar nicht, oder doch nur durch sehr weite Umwege erreichet werde könte.

Zweiter Abschnit.

Von den Linien.

Erstes Hauptstück.

Von Ausmessung der geraden Linie.

Aufgabe.

§. 36.

Zwischen zween gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen.

Auflösung. Erster Fal. Auf dem Papier oder einer andern kurzen Fläche.

Leget an die beide gegebene Punkte ein Lineal, und ziehet längst demselben mit Reisblei, oder mit der Reisfeder, oder irgend einem Griffel eine Linie, welche da sie von zween Punk-

Punkten bestimmet wird, gerade sein wird.

§. 8.

Da indessen bei diesem Verfahren alles auf die Richtigkeit des Lineals ankomt, so mus solches vorhero geprüfet werden, welches folgendergestalt geschieht. Ziehet nach dem Lineal eine Linie AB; hierauf kehrt es um, so daß die obere Fläche unten zu liegen komme, und leget das Lineal mit der nehmlichen Seite an die gezogene Linie. Komt es nun mit derselben an allen Orten volkommen überein, so ist es gerade und richtig, wo nicht, so hat es eine krümme, und mus vom neuen durch den Hobel lauffen.

Fig. 15.

Zweiter Fal. Wenn der Abstand der gegebenen Punkte für ein Lineal zu gros ist.

Spanet an die beiden Punkte eine Schnur stark an, die nicht nur schon vor sich eine gerade Linie anzeigen wird, sondern auch zu Zeiten nach Erfordernis des Gebrauches mit Kreide, oder Röhtel bestrichen wird, und alsdann durch das Aufschnellen auf der gegebenen Fläche eine Spur an staat der gezeichneten Linie hinterläst.

Wenn auf diese Art die angespante Schnur auf einer ebenen Fläche auflieget, so wird sie allemal eine gerade Linie anzeigen. Hänget sie aber frei, so macht sie nur nach einem Sinne und in einer Betrachtung eine gerade Linie, daß sie nehmlich weder rechts noch links davon abweichet; aber nicht in Absicht auf die Höhe und Tieffe, besonders wenn sie von einer beträchtlichen Länge ist, wo

ih-

ihre eigene Schwere sie allemal eine Krümmung abwärts zu machen nöhtig ist, so scharf sie auch gespannet wird. Eben diese Beobachtung ist auch nicht ausser Acht zu lassen, wenn an einer aufrecht stehenden Fläche eine gerade Linie vermittelst einer Schnur gezogen werden sol.

Dritter Fal. Auf dem Felde, oder wo sonst die Entfernung so groß ist, daß die Linie nicht würklich gezogen, sondern nur durch einige mit Pflöcken oder mit ausgesteckten Stangen bemerkte Punkte angezeiget werden darf.

1. Wenn von den beiden gegebenen Richtungspunkten A und B frei zu einander gesehen werden kan, so stecket in dieselbe gerade Stangen nach dem Senkel ein; hierauf stellet euch einige Schritte hinter A zurück, und lasset zugleich sich einen Gehülfen in einer beliebigen und diensamen Entfernung nach C mit einer andern Stange begeben, welcher dieselbe so lange links oder rechts richten mus, bis ihr aus A bemerket, daß beide Stangen in C und B zugleich volkommen bedecket werden. Nach diesem können auch noch mehrere Punkte D und E gefunden werden; nur daß, wenn einmal drei Punkte bestimmet sind, die Persohn in A nicht mehr unmittelbar nöhtig ist, weil nunmehro die Stange in C schon vor sich nach den beiden vorhergehenden Punkten A und B, so die Richtung der Linie bestimmet, Fig. 16.

gerichtet werden kan; nach welcher leztern Art auch die Verlängerung einer geraden Linie geschieht.

In einigen besondern Fällen, z. B. bei starken Vertieffungen, wo keine Stäbe ausgesteckt werden können, wird eine gerade Linie auch durch herabgelassene Senkel, iedoch nach eben den vorigen Regeln bestimmet.

Wenn auf dem Felde bei verschiedenen Gelegenheiten die gezogene Linie sichtbar und merklich sein sol, und es folglich nicht hinlänglich ist, blos einige Punkte davon durch Stäbe und Pflöcke zu bezeichnen, so wird über dieselbe eine Schnur gespannet, und längst derselben eine schmale Rinne in die Erde eingehauen, welches traciren genennet wird.

2. Wären aber die gegebene zween Punkte
Fig. 17. A und B so beschaffen, daß man wegen einer dazwischen liegender Hindernis nicht von einem zum andern sehen könte, so stellet sich eine Persohn in einem beliebigen Punkte D, aus welchem sie nach B, und eine andere Persohn in F, die nach A siehet, und den Punkt F mit D und A in gerader Linie hat. Beide Persohnen wenden sich in dieser Stellung so weit rechts oder links, bis nicht nur der Punkt F mit D und A, sondern auch zugleich der Punkt D mit F und B in gerader Linie gefunden wird, welches ein Zeichen ist, daß beide in C und E auf der verlangten geraden Linie angelanget sind.

Sind

Sind überhaupt bei diesem ganzen Verfahren die gegebene Punkte so weit von einander entfernet, daß sie nicht wohl mehr mit freien Augen entdecket werden können, so bedienet man sich dabei eines an die Stäbe angelegten Fernrohres.

Erklärung.

§. 37. Da eine Linie nicht anders als durch eine andere Linie ausgemessen werden kan, §. 5. so mus dabei allezeit eine bekante Linie zum Maasstab angenommen werden, und eine Linie oder **Länge ausmessen**, heist also nichts anders, als die Grösse derselben nach diesem Maasstabe bestimmen, oder untersuchen, wie oft dieser in iener enthalten ist.

Zusatz.

§. 38. Da die Grösse der Linie so zum Maasstabe angenommen wird, wilkührlich ist, und durch mancherlei Umstände veranlasset und zum Gebrauche eingeführet worden, so sind die Maasstäbe **teils** in Absicht auf den Gegenstand, zu dessen Ausmessung sie dienen, **teils** in Absicht auf die Länder und Zeiten, wo und wann sie gewöhnlich gewesen, **teils** auch in Absicht auf die dabei beliebte Einteilung, gar sehr von einander unterschieden. Das gewöhnlichste zuerst angenommene Maas ist ein **Schuh** (Fus, Werkschuh), deren 6. eine **Klafter** (toise) ausmachen, und dessen Einteilung **zwölfteilig** ist, so daß der zwölfte Teil eines

Schuhes ein Zol, der zwölfte Teil eines Zolles eine Linie, der zwölfte Teil einer Linie ein Punkt, u. s. w. genennet wird.

So wenig als die Sprachen, Sitten und andere von der Wilkühr abhängende Gebräuche überal und unveränderlich einerlei sein können, so wenig ist solches auch von den Maassen zu erwarten, besonders da bisweilen auch die Bequemlichkeit nach Erfordernis der Gegenstände einen Unterschied darin veranlasset hat. So findet man zum geographischem Gebrauche, **Meilen**, **Stadien**, **Werste**, **Parasangen** u. s. w. in der Astronomie, ganze und halbe **Erddiameter**, in der Bergbaukunst, die **Lachter**, in den Kramläden, **Ellen**, **Stäbe** u. s. w. in der Architektur bei den Saulenordnungen, den Modul, in der Artillerie den Kaliber u. s. w. Zum geometrischen Gebrauche ist das **Fusmaas** das gewöhnlichste, obgleich zu Zeiten einige Länder auch hierin noch etwas eigenes haben, so wie z. B. in Böhmen noch das Landseil von 52. Ellen iede von 2. Schuh gebräuchlich ist. An staat der Klafter werden auch an einigen Orten **Ruhten** gebraucht, so bald 10. bald 12. Fus enthalten. Ist bei den Ausmessungen keine sonderliche Schärfe nöhtig, so wird auch ein **Schrit** gebraucht, deren 5. zwo Klafter ausmachen.

Um der Leichtigkeit in der Rechnung willen würde das zehenteilige Maas das bequemste sein, (Rechenk. §. 104) wenn es nicht zu sehr dem eingeführten Gebrauche entgegen wäre. Wie die Reduktion desselben in das zwölfteilige und umgekehrt geschehen müsse, erhellet aus (Rechenk. §. 114.)

Die

Die Zeichen des Fusmaasses sind mit den Zeichen der Grade und dessen Abteilungen einerlei §. 14. Ist demnach von einem Längenmaasse die Rede, so bedeutet die Zahl 35° 4' 8'' 9''' 35 Klaster, 4 Zol, 8 Linien und 9 Punkten; wenn aber die Ruthen an staat der Klaster im Gebrauche sind, so heist die erste Zahl 35 Ruhten.

Zusatz.

§. 39. Da das Fusmaas in verschiedenen Ländern so sehr verschieden ist, so müssen die vornehmsten derselben, wohin vorzüglich der **Wiener**, **Pariser** (pied du Roi), der **Londner**, und der **Rheinländische** Fus gehören, bekant, und ihre Verhältnis gegen einander bestimmet sein, damit man sie in einander reduciren und verwandeln könne, widrigenfals sehr wichtige Abmessungen öfters unverständlich und unbrauchbar bleiben würden. Wenn demnach der Wiener Schuh in 100000 Teile abgeteilet wird, so ist die genaue Verhältnis der nachstehenden folgende:

Wiener-Schuh........	100000.
Pariser.............	102764.
Londner.............	96460.
Rheinländer..........	99326.
Schwedische..........	93951.
Bayrische............	92331.
Leidner	99326.
Nürnberger..........	96109.
Mailänder...........	188400.

Böhmische.	93767.
Mährische	105700.
Alt Römische.	93487.
Neu Römische.	94232.
Schemnitzer Bergschuh. . .	107143.

Weil eine richtige Bestimmung der Verhältnisse verschiedener Maassen sehr viele Genauigkeit erfordert, und auch die Originalen selbst öfters übel beschaffen, oder wenigstens nicht wohl verwahret worden sind, so ist es kein Wunder, daß man öfters so verschiedene Verhältnisse in den Schriften antrift, daß man einen billigen Zweifel in ihre Zuverlässigkeit setzen mus.

Die gegenwärtige sind (die letzte ausgenommen) des aus P. Liesganig Dimensio graduum Meridiani Viennensis & Hungarici, genommen, und das zum Grunde gelegte Wiener-Maas ist das nehmliche, dessen er sich in dieser seiner Verrichtung bedienet hat, und welches in Wien auf der alten Sternwarte auf einer eisernen Stange neben dem Pariser Maase aufbewahret wird.

Aufgabe.

§. 40. Eine gerade Linie zu messen.

Auflösung. Erster Fal. Auf dem Papier, oder einer andern kurzen Fläche.

Fasset die gegebene Lienie zwischen die zwo Spitzen eines gemeinen, oder wenn solcher nicht hinreichend, eines Stangenzirkels, und traget solche auf einen besonders verfertigten und mit den nöhtigen Abteilungen versehenen Maasstab,

stab, wo alsdann die eigentliche Grösse derselben gefunden wird.

Worin dieser Stangenzirkel bestehe, und was er für Eigenschaften besitzen müsse, wird mündlich erkläret werden.

Obgleich alhier noch nicht von dem sogenanten veriüngtem Maasstabe geredet werden kan, so wird doch alhier der algemeine Begrif derselben, und die zu Abmessung der Linien bequemste Einteilung umständlicher gewiesen werden.

Zweiter Fal. Auf dem Felde.

1. Wenn keine genaue Schärfe erfordert wird, oder Zeit und Umstände keine andere Messungsart verstatten, so wird die Linie nur abgeschritten, wobei man sich iedoch einen gleichen Schrit anzugewöhnen, hauptsächlich aber einen ebenen Boden zu erwählen hat, denn wenn man bald berg auf, bald berg unter gehet, so entstehet keine gerade, sondern eine krumme Linie.

2. Wird bei der Ausmessung eine grössere Genauigkeit verlanget, als durch blosse Schritte erhalten werden kan, so bedienet man sich der in Klafter und Schuhe abgeteilten Meskketten, welche längst der gegebenen Linie so oft ausgezogen und wiederholet wird, als sie darin enthalten ist.

Da diese Mesketten bei Abmessung der Linien sehr gebräuchlich sind, so wollen wir sowohl in

Absicht auf ihre Einrichtung, als auch ihren vorteilhaften Gebrauch noch einige Erinnerungen beifügen. Sie sind meistens vom starken Eisendrat verfertiget, oder auch von kurzen eisernen Stangen zusammengesetzt, zehn Klafter lang, und von Klafter zu Klafter mit messingenen, von Schuh zu Schuh aber mit eisernen Ringen abgeteilet. Beide Enden sind entweder mit breiten Ringen, oder auch mit länglich viereckigten Hülsen versehen. Die ersten dienen, um in ieden einen etwan fünf Schuh langen Staab hineinzustecken, wodurch die Kette angespannet und in der Richtung erhalten wird; die andern aber, um sie auf die zu Ende der Kette in die Erde gesteckte und wie ein T aussehende Nägel zu legen, und allemal die Länge der Ketten damit auf dem Boden zu bemerken.

Ist nun eine Linie mit der Kette zu messen, so stellet sich iemand mit einem Ende derselben auf den Anfangspunkt, und der andere mit dem zweiten Ende lässet sich durch den ersten so lange rechts oder links richten, bis er von ihm in der Richtung der zu messenden Linie gesehen wird. Hierauf spannen sie die Kette fest an, und der vordere stosset an seinem Ende einen von den vorbemeldeten Nägeln, wovon er einen Vorraht bei sich führet, in die Erde, worauf sie alle beide so lange vorwerts gehen, bis der hintere zu diesem Nagel komt. Dann legt er sein Ketten-Ende auf demselben, richtet den vordern wieder in die Linie, und nachdem die Kette wieder fest angezogen worden, stosset der vordere abermals einen Nagel ein, und der hintere ziehet den seinigen aus, welchen er bei sich behält und verwahret. Auf diese Art fahren sie durch die ganze Linie fort. So viele Nägel nun der hinterste

ste von dem vordern erhalten, so viele Kettenlängen sind gemessen worden, und dürfen demnach nur zusammen gezählet werden. Reicht aber bei grossen Weiten die vorhandene Anzahl der Nägel nicht zu, so giebt der leztere dem erstern die ganze gesamlete Zahl derselben, so oft es nöhtig, wieder zurück, merket aber iedesmal wohl auf, wie oft solchergestalt die Nägel verwechselt worden; woraus dann endlich die ganze Länge der Linie gefunden wird.

Es ist zu dieser Messungsart, ausser der Sorgfalt, so auf die iedesmalige Zuverlässigkeit der Kette selbst gewendet werden mus, nicht minder ein ziemlich ebener Boden, und ein gleiche Anspannung der Kette nöthig, widrigenfals nicht viele Richtigkeit gehoffet werden darf. Von dieser Nohtwendigkeit wird man um so mehr überzeuget, wenn die nehmliche Linie öfters übermessen, und dann der gefundene Unterschied in der Länge in Betrachtung gezogen wird, der allezeit um so viel grösser sein wird, ie nachlässiger man in Anspannung der Ketten gewesen, oder ie ungleicher der Boden selbst ist.

3. Sol endlich eine Linie auf das genaueste gemessen werden, so geschiehet solches vermittelst besonderer auf das fleissigste zugerichteter **Messtangen**, welche längst der gegebenen Linie dicht aneinander gestossen, und iedesmal wagerecht geleget worden, aus deren Anzahl dann die gesuchte Länge der Linie erhellet.

Diese Messtangen, wovon Fig. 18. die zwei zusammengestossene Enden zu sehen sind, werden Fig. 18.

den um der Leichtigkeit willen, von gutem, gerade gewachsenem und sehr trockenem weichen Holze verfertiget, und um das Werfen zu verhindern, aus mehrern Stücken zusammen geleimet, und mit Oelfarbe wohl überstrichen. Man pfleget sie 2 oder 3 Klafter lang, in die hohen Kante 2½ Zol, und in der breiten 3 Zol, oder auch nach Beschaffenheit der Umstände noch etwas stärker zu machen. An beiden Enden wird ein etwan 1 Zol breites und 2 Linien dickes Eisen, wie A und B gestaltet, angeschraubet, überhaupt aber dabei angetragen, daß die anfängliche Weite dieser beiden Eisen von einander etwas merklich grösser werde, als die Länge einer Meßstangen selbst werden sol. Von dergleichen Stangen müssen 3 oder 4 vorhanden sein. Ausser denselben hat man aber noch eine andere, so zu nichts anders, als zu richtiger Bestimmung der Länge der vorigen dienet. Sie ist von denselben in nichts unterschieden; als daß ihre Eisen in einem rechten Winkel, etwan ½ Zol hoch, aufwärts gebogen sind, und wovon man eines vermittelst einer Schraube etwas weniges vor oder rückwärts bewegen kan; auf daß sie genau den verlangten Abstand von einander erhalten, den die Länge der Meßstange erfordert. Dieser Abstand der zwei aufwärts gebogenen Eisen, und folglich auch die daraus fliessende eigentliche Länge der Meßstangen selbst, wird auf folgende Art bestimmet. Man spannet nehmlich über die Stange von einem aufgebogenem Eisen zu dem andern einen Faden, fasset mit einem guten Mikrometer-Stangenzirkel eine ganze Klafter so genau als möglich, setzet eine Spitze desselben in den Winkel eines Eisens, mit dem andern aber machet man an dem

Fa-

Faden auf einem daselbst in das Holz eingelassenem messingenem Blattel einen feinen Punkt, und aus diesem traget man auf das zweite Blattel die zwote Klafter, und s. w. bis man zu der lezten gekommen, bei welcher man das Eisen so lange hin oder her schrauben mus, bis dessen aufgebogenes Ende genau an die Zirkelspize reichet. Nachdem man nun den wahren Abstand der Eisen auf diese Art bestimmet hat, so leget man eine Messtange nach der andern daran, feilet von ihren Endeisen so viel hinweg, bis sie ganz genau zwischen die aufwärts gebogene Eisen der Musterstange passen, und folglich alle einerlei Länge erhalten.

Wil man nun mit diesen Stangen eine Linie AB messen, so wird sie zuvor mit Pflöcken, etwan von 50 zu 50, oder von 100 zu 100 Schrit ausgestecket, und an denselben auf der Erde eine Schnur stark angespannet, die man, wenn sie nicht lang genug ist, währender Messung immer weiter fortziehet. An diese leget man die Messtangen horizontal, eine nach der andern, so daß sie sich mit der Schärfe ihrer Eisen, wie in D geschiehet, auf das genaueste berühren. Wenn dieses geschehen, nimt man immer die hinterste Stange hinweg, leget sie wieder an die vordere, und fahret solchergestalt durch die ganze Linie fort. Das Horizontallegen der Stangen lässet sich mit Hülfe einer Sez- oder Schrotwage N, und durch Unterlegen einiger eigens hiezu im Vorraht habender Bretteln am bequemsten verrichten. Ereignet es sich aber, daß der Boden sehr uneben ist, so daß das Ende der folgenden Stange höher oder niedriger zu liegen komt, als das Ende der vorhergehenden, so leget man an das obere einen sehr feinen Senkel C, und rücket die Fig. 19.

die folgende Stange so lange gegen die vorhergelegte, bis der Senkel auch die Schärfe des Eisens der andern genau berühret, und solte der Faden des Senkels eine beträchtliche Dicke haben, und oft angewendet werden müssen, so merket man die Zahl davon auf, und addiret zur ganzen gemessenen Länge noch den Betrag eben so vieler Dicken der Senkelfäden.

Ob nun zwar diese Art, eine Linie mit Messtangen zu messen, an sich selbst sehr mühsam ist, so ist sie doch unter allen die genaueste, und sonderlich bei trigonometrischen Unternehmungen sehr nohtwendig. Es scheinet zwar, daß sie sehr langsam von statten gehen müsse, allein wenn man einmal darin geübet ist, und der Boden nicht gar zu beträchtliche Ungleichheiten hat, so kan man ohne Anstand in einem Tage 1000 bis 1500 Klafter messen. Uebrigens aber käme es noch auf wiederholte Versuche an, ob diese Messungsart, welche durch die unbequeme Leibesstellung, so man bei den auf der Erde liegenden Stangen nehmen mus, höchst ermüdend ist, nicht bequemer eingerichtet werden könte, wenn man die Stangen nicht mehr unmittelbar auf die Erde, sondern vielmehr auf besonders verfertigte Stellagen oder Böcke, die sich nach Erfordernis hoch oder niedrig richten liessen, legete, so daß die ganze Abmessung in einer bequemen Erhöhung von der Erde geschehe, ohngefähr auf die Art, wie Bouguer bei Bestimmung der Standlinie zu Abmessung eines Meridianalgrades ohnweit Quito verfaren ist, oder auch, wenn man das Maas mit einem etwan zwo Klafter langen Stangenzirkel von einer solchen Stellage auf die andere trüge, und immer die hintere wieder vor-

vorwärts sezete. Die Erfahrung würde bald entscheiden, ob man einen Vorteil dadurch erhielte oder ob die dadurch gewonnene Bequemlichkeit nicht etwan der Richtigkeit einen Abbruch verursachete.

Dieses sind nun die üblichste und brauchbarste Arten, eine Linie auf dem Felde würklich auszumessen, wovon aber öfters eine der andern vorzuziehen ist, nach dem mehr oder weniger Schärfe bei dem Verfahren verlanget, oder auch von den iedesmaligen Umständen verstattet wird. In nicht seltenen Fällen ist man so gar gezwungen, alle Abmessung fahren zu lassen, und die Länge der Linien, oder die Entfernung der Oerter durch blosses Schäzen nach dem Augenmaas zu bestimmen. Da sich aber dieses Augenmaas in keine bestimmte Regeln bringen lässet, sondern durch eigene wiederholte Uebung erworben werden mus, so kan den angehenden Artilleristen, welchen vorzüglich die Fertigkeit nach dem Augenmaas zu schäzen unentbehrlich ist, zu Erwerbung derselben nichts bessers angerathen werden, als daß sie sich öfters bemühen, die Entfernungen verschiedener Gegenstände nicht nur in der Ebene, sondern auch von der Höhe in die Tieffe, und von der Tieffe in die Höhe, über Wasser, Tähler, Waldungen u. s. w. bei heiterem und trüben Himmel, und verschiedenen Witterungen, zur Morgens- Mittags- und Abendszeit, gegen Aufgang und Niedergang u. s. w. zuerst nach dem Auge zu schäzen, und dann auf die eine oder andere Art auszumessen, um ihr Augenmaas dadurch zu verbessern und almälig zu versichern.

Zweites Hauptstück.

Von der senkrechten und schrähen Linie.

Erklärung.

§. 41.

Fig. 20. Wenn eine Linie CD dergestalt auf eine andere AB stehet, oder sie durchschneidet, daß sie sich nicht mehr auf die eine als die andere Seite neiget, so wird die erste **senkrecht** (perpendikular), die andere aber in Ansehung der ersten **wagerecht** (horizontal) genennet; sind aber die Neigungen auf beiden Seiten ungleich, so entstehen **schrähe** Linien.

Da eigentlich ein mit einem Gewichte beschwerter und freihängender Faden oder ein Senkel eine perpendikulare, und die auf der Oberfläche eines stehenden Wassers angenommene gerade Linie eine horizontale oder auch **wasserrechte** Linie vorstellet, so sind die angeführte Benennungen daher genommen worden, wie wohl lezteres wegen der Krümmung der Erde nicht nach der Schärfe zu verstehen ist, so aber bei gegenwärtiger Erklärung in keine Betrachtung komt.

Zu-

Zusatz.

§. 42. Hieraus fliessen folgende unmittelbare Folgerungen.

1. Eine senkrechte Linie EA machet mit einer horizontalen DB beiderseits gleiche Winkel EAD und EAB, und diese müssen von 90° oder rechte Winkel sein. §. 24. N. 4. und wenn zwo zusammenstossende Linien einen rechten Winkel einschliessen, so stehen sie auf einander senkrecht. Fig. 21.

2. Wenn zwo auf einander senkrecht stehende Linien sich durchschneiden, oder über den Berührungspunkt verlängert werden, so entstehen vier rechte folglich gleiche Winkel. §. 24. N. 3.

3. Wenn zwo Linien AB und CD rechte Winkel mit einander machen, und man richtet die eine davon CD nach einem freihängenden Senkel, so stehet die andere AB horizontal, oder trift mit einer stehenden Wasserfläche überein; und umgekehrt, wenn man die eine davon AB nach einer stehenden Wasserfläche richtet, so mus die andere CD mit einem freihängenden Senkel übereinfallen. Fig. 20.

Hierin bestehet der Grund sowohl von den so genanten Setz- oder Schrotwagen, als auch von manchen andern mathematischen Instrumenten, bei welchen man öfters teils eine Seite horizontal stellet, um die andere so mit ihr einen rechten Winkel machet, perpendikular zu bekommen, teils umge-

kehrt

kehrt eine Seite nach einem Senkel oder Bleifaden perpendikular richtet; damit die andere horizontal werde; wohin vorzüglich der Quadrant gehöret.

Zusaz.

Fig. 21. §. 43. Da eine Perpendikular EA mit einer horizontalen Linie DB zu beiden Seiten gleiche Winkel machen mus, §. 42. N. 1. so kan

1. auf einen Punkt A der Linie DB nur eine Perpendikular errichtet, und

2. von einem ausser DB gegebenen Punkt E ebenfals nur eine Perpendikular EA auf DB gefället werden. Denn wolte man noch eine zwote AC oder EF für senkrecht annehmen, so würde sie, da sie nicht auf AE fallen kan, nohtwendig sich mehr auf die eine als die andere Seite neigen, folglich nicht beiderseits gleiche Winkel machen.

Lehrsaz.

§. 44. Die senkrechte Linie ist die kürzeste, so von einem Punkte auf eine Linie gezogen werden kan.

Fig. 20. **Vorbereitung.** Ziehet die Linie AB, und lasset von dem Punkte D die Perpendikular DC darauf fallen, so ist zu erweisen, daß DC kürzer sei, als eine iede andere Linie DH, DG oder DE, so von dem Punkte D auf AB gezogen werden kan.

Be-

Beweis. Verlängert DC auf die andere Seite, so daß CF=DC werde, und hierauf ziehet die Linien FH, FG und FE. Nun ist in den beiden Dreiecken DCH und HCF die Seite DC=CF; die Seite CH ist beiden gemein, und der Winkel DCH ist dem Winkel FCH gleich, §. 42. N. 2. folglich sind in beiden Dreiecken zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, und sie also gleich und ähnlich, folglich auch DH=FH. §. 33. Nun ist DH+HF>DF. §. 30. daher auch $\frac{DH+HF}{2} > \frac{DF.}{2}$ §. 56. N. 4 Rechenk. das ist: DH>DC. Auf eben diese Art wird auch erwiesen, daß so wohl DG als DE grösser sind als DC.

Zusatz.

§. 45. Weil alle Entfernung der Gegenstände durch die kürzeste Linie zwischen denselben ausgedrückt wird, §. 7. so bestehet die Entfernung eines Punkts von einer geraden Linie in der Perpendikular, so von dem ersten auf die leztere gefället werden kan.

Lehrsatz.

§. 46. Wenn aus einem Punkte A zwo schrähe Linien AF und AG auf eine Linie CD gezogen werden, so von einem in derselben angenommenen Punkte B gleich weit abstehen, Fig. 22.

so folget 1. wenn AB auf CD perpendikular ist, daß AF = AG. und 2. wenn umgekehrt AF = AG so ist AB perpendikular auf CD.

Beweis. Im ersten Falle sind in den beiden Dreiecken ABF und ABG die Seiten BF = BG, AB = AB und der Winkel ABF = ABG. §. 42. N. 1. folglich ist AF = AG, §. 33.

Im andern Falle sind alle drei Seiten des einen Dreiecks allen drei Seiten des andern gleich, folglich sie selbsten gleich und ähnlich, und die Winkel ABF = ABG. §. 35. und von 90° §. 24. N. 4. Daher ist die Linie AB auf CD senkrecht. §. 42. N. 1.

Aufgabe.

§. 47. Auf einen in der Linie CD gegebenen Punkt B eine Perpendikular aufzurichten.

Auflösung. Erwählet auf der Linie CD zween von B gleich weit abstehende Punkten F und G, beschreibet aus beiden mit einer nach Belieben angenommenen gleichen Eröfnung des Zirkels die zween Bögen EL und HI, dergestalt, daß sie sich in einem Punkte A durchschneiden, und ziehet hierauf durch A und B eine gerade Linie, so wird sie auf CD senkrecht stehen. §. 46.

Aufgabe.

§. 48. Aus einem ausser der Linie AB gegebenen Punkte E eine Perpendikular fallen zu lassen. Fig. 23.

Auflösung. 1. Setzet den Zirkel in E, und durchschneidet mit einer beliebigen Eröfnung desselben die Linie AB in zween Punkten C und D.

2. Aus denselben beschreibet abermals mit wilkürlicher Eröfnung des Zirkels zween Bögen, so sich in G durchschneiden;

3. Ziehet endlich die beide Punkte E und G durch eine gerade Linie zusammen, so wird EH perpendikular auf AB stehen.

Beweis. Weil EC = ED, CG = DG und EG beiderseits gemein, so ist das Dreieck ECG = EDG folglich der Winkel CEH = DEH §. 35. Ferner in den beiden Dreiecken CHE und DHE ist EC = ED, dann die Seite EH beiden gemein, und die dazwischen begriffene Winkel CEH = DEH; folglich sind die Dreiecke gleich und ähnlich, und die Winkel EHC = EHD. §. 33. Daher ist die Linie EH auf AB senkrecht.

Wenn zu dem Durchschnitte in G unterhalb der Linie AB kein Plaz vorhanden ist, so kan er auch auf eben der Seite von E entweder oberhalb oder unterhalb dieses Punktes gemacht werden; wo das übrige Verfahren so wohl als die Demonstration unverändert bleibet.

Aufgabe.

Fig. 24. §. 49. Eine Linie AB in zween gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Beschreibet nach eben dem Verfahren, wie in §. 48. gezeiget worden, die sich in C und D durchschneidende Bögen, ziehet diese Punkte durch CD zusammen, so wird dadurch die Linie in E in zween gleiche Teile geteilet; weil nach der vorhergehenden Demonstration AE=BE wird.

Aufgabe.

Fig. 25. §. 50. Einen gegebenen Winkel BAC in zween gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. 1. Ziehet aus der Spitze des Winkels A mit beliebiger Eröfnung des Zirkels den Bogen BFC.

2. Aus B und C machet auf eben diese Art die Durchschnitsbögen in D.

3. Ziehet endlich die Linie AD, so wird dadurch der gegebene Winkel in zween gleiche Teile geteilet.

Beweis. Weil AB=AC, BD=CD und AD=AD, so sind in beiden Dreiecken ABD und ACD alle drei Seiten gleich, folglich auch die Dreiecke selbsten und ihre gleichnamige Winkel. §. 35. Daher ist der Winkel BAD= CAD.

Fig. 26. In der Ausübung ist es sehr bequem, die Perpendikularen mit Hülfe eines hölzernen Dreieckes oder

oder Winkelhackens zu ziehen, der genau einen rechten Winkel enthalten mus. Man leget nehmlich eine Seite desselben an die gegebene Linie AB, und längst der andern ziehet man die Perpendikular CD. Die Richtigkeit des rechten Winkels wird untersuchet, wenn man das Dreieck oder den Winkelhacken auf der andern Seite anleget, und dabei untersuchet, ob die Linie CD nicht mehr auf die eine oder die andere Seite hange, sondern beständig einerlei verbleibe.

Wenn auf dem Felde Perpendikularen abzustecken sind, so bedienet man sich der Schnüre anstaat des Zirkels, nur müssen sie allezeit gleich stark angespannet werden. Andere Arten Perpendikularen zu ziehen, werden noch in der Folge vorkommen.

Lehrsatz.

§. 51. Wenn zwei rechtwinkelichte Dreiecke die Hypothenuse und eine Seite gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich, und die übrige gleichnamige Teile einander gleich; d. i. Wenn BC = bc und AC = ac, so ist ABC $\cong$ abc; AB = ab A = a und C = c. Fig. 27.

Beweis. Man lege die beide Dreiecke mit der gleichen Seite BC und bc an einander, so werden die Seiten AB und ba in einer geraden Linie zu liegen kommen, weil die beide daran liegende Winkel zusammen 180° ausmachen §. 22. und CB ist darauf senkrecht. §. 42. N. 1. Nun mache man aus A und a mit beliebiger Eröfnung eines Zirkels einen Durch-

 schnit

schnit in D, so daß AD = aD wird, und ziehe die Punkte C und D mit einer geraden Linie zusammen, so wird solche auf Aa senkrecht sein §. 48. Da nun aber auch CB darauf senkrecht ist, und von einem Punkt C auf die Linie Aa nur eine senkrechte Linie gezogen werden kan §. 43. so mus die Linie CD nothwendig auf CB fallen. Da nun durch die Perpendikular CD die Linie Aa auch in zween gleiche Teile geteilet worden, §. 49. so ist AB = ab. und das Dreieck ABC = abc §. 35. A = a und C = c.

Ein rechwinkelichtes Dreieck wird allezeit durch zwo Seiten bestimt, sie mögen den rechten Winkel einschliessen oder nicht. Eben dieses gilt auch zwar von den stumpfwinkelichten, so aber alhie noch nicht erwiesen werden kan, keineswegs aber von den spitzwinkelichten.

Drittes Hauptstück.

Von den Parallellinien.

Erklärung.

§. 52.

Linien auf einer Fläche, so allezeit einerlei Entfernungen von einander behalten, sind gleichlauffend (parallel). Da nun die Entfer-

fernungen zwoer Linien die kürzeste, folglich die senkrechte Linien sind, so von den Punkten der einen auf die andere gezogen werden können, §. 45. so sind in Parallelen die senkrechte Linien, so von der einen auf die andere gezogen werden können, überal gleich.

Wenn demnach die zwo Linien AB und CD als gleichlauffend angenommen werden, und man läst von zween Punkten der ersten F und H die Perpendikularen FG und HI auf die andere herab, so müssen sie gleich sein. Fig. 28.

Daher können Parallellinien niemals zusammen stossen, und nie einen Winkel mit einander machen, so weit sie auch verlängert werden, weil bei ihrer Zusammenstossung nicht nur die Gleichheit der Entfernung, sondern auch die Entfernung selbst aufhören wird. Es ist aber zu dem Begriffe der Parallellinien überhaupt nicht genug, daß sie niemals zusammen stossen können, sondern sie müssen sich auch nicht almälig nähren, sondern allezeit eine gleiche Entfernung und Weite von einander behalten. Denn es giebt Linien, so sich einander unendlich nähern, ohne doch iemals zusammen zu stossen, und dennoch keinesweges parallel sind.

Obgleich alhie eigentlich und vorzüglich von geraden Linien die Rede ist, so giebt es doch auch krumme Parallelen, z. B. zween Zirkelkreise, so auf einer Fläche aus einerlei Mittelpunkte beschrieben werden. Ihre Entfernung von einander ist der Unterschied ihrer Radien, welcher überal gleich ist, so wie die Radien selbst. Denn weil AB = AD und AC = AE, so ist AB — AC = AD — AE. Fig. 29.

AE. d. i. BC = DE. Daß aber BC oder DE senkrecht zwischen den beiden Kreisen stehe, komt im folgenden vor.

So giebt es auch parallel liegende Flächen, wenn sie überal in gleicher Weite von einander abstehen, oder wenn die Perpendikularen, so von der einen auf die andere fallen gelassen werden, durchgehens gleich sind; z. B. wenn ein Cylinder etlichemal in gleicher Weite gerade durchschnitten wird, so liegen die daraus entstehende Zirkelflächen parallel, und ihre Umkreise lauffen auf der Oberfläche des Cylinders gleichsfals parallel.

Lehrsaz.

Fig. 30. §. 53. Wenn man von einem Punkte E der Parallele AB eine senkrechte Linie EF auf die andere Parallel CD fallen läßt, so stehet sie auch auf die erstere AB senkrecht.

Beweis. Man setze, EF sei nicht auf AB senkrecht, so kan man doch von F eine andere Perpendikular darauf fallen lassen. Diese sei FG. Nun lasse man von dem Punkte G eine Perpendikular GH auf CD fallen, so wird solche die kürzeste sein; so von G auf CD gezogen werden kan. §. 44. folglich kürzer als GF. Da nun vermöge der Eigenschaft der Parallelen GH = EF. §. 52. so ist auch EF kürzer als FG; folglich ist FG nicht die kürzeste Linie, so von dem Punkte F auf AB gezogen werden kan, folglich auch nicht senkrecht §. 44. Weil nun eben dieses von allen andern

Linien, ausser FE, erwiesen werden kan, so mus EF auf AB senkrecht stehen.

Es ist also völlig einerlei, ob man sagt, die Perpendikularen werden von der ersten Parallel auf die zwote, oder umgekehrt gezogen; denn sie stehen allezeit auf beide zugleich senkrecht.

Lehrsaz.

§. 54. Wenn zwo Parallelen AB und CD von einer dritten geraden Linie EF durchschnitten werden, so sind 1. die **Wechselswinkel** (anguli alterni) einander gleich, nehmlich $i = m$, und $k = l$. 2. Die äussere und innere auf einer Seite der durchschneidenden Linie liegende Winkel sind gleich, d. i. $h = m$, $k = o$, $g = l$ und $n = i$. 3. Die beide äussere entgegen gesetzte Winkel sind gleich, d. i. $h = n$, und $g = o$. 4. Die beide innere auf eben der Seite liegende Winkel sind zween rechten gleich, d. i. $i + l = 180°$ und $m + k = 180°$ und 5. auch die beide äussere auf einer Seite liegende Winkel machen ebenfals zween rechte aus d. i. $n + g = 180°$ und $o + h = 180°$. Fig. 31.

Beweis. 1. Man ziehe durch die beide Durchschnitspunkte P und S die Perpendikularen PQ und SR, so auf beide Parallelen zugleich senkrecht stehen §. 53. so sind solche die Entfernungen derselben, und folglich einander gleich §. 52. Folglich ist in den rechtwinkelichten Dreiecken PQS und SRP die Sei-

te PQ = SR und die Seite PS beiden gemein; folglich sind sie einander gleich, und der Winkel i = m. §. 51. 32. Ferner, weil i + k 180° und m + l = 180°. §. 21. so sind i + k = m + l. folglich auch k = l.

2. Weil die Scheitelwinkel h = i §. 24. N. 2. und i = m. N. 1. so ist auch h = m. Aus eben der Ursache ist auch k = o, g = l und n = i.

3. Der Winkel h = m. N. 2. nun ist m = n. §. 24. N. 2. folglich ist auch h = n. Ferner ist g = k. §. 24. N. 2. und k = o. N. 2. folglich auch g = o.

4. Weil i + k = 180° §. 21. und k = l, N. 1. so ist auch i + l = 180°. Ferner da i + k = 180° und i = m. N. 1. so ist auch m + k = 180°.

5. Die Winkel n + l = 180°, nun ist g = l. N. 2. folglich sind n + g = 180° Desgleichen o + m = 180° und h = m. N. 2. folglich o + h = 180°.

Lehrsatz.

§. 55. Wenn umgekehrt bei Durchschneidung zwoer geraden Linien durch eine dritte. 1. Die Wechselswinkel gleich werden; 2. wenn die innere und aussere auf einer Seite der durchschneidenden Linie liegende Winkel gleich sind; 3. wenn die beide äussern entgegengesetzte Winkel gleich sind; 4. wenn die beide innere auf

einer

einer Seite liegende Winkel zween rechten gleich sind; und 5. wenn die beide äussere auf einer Seite liegende Wintel ebenfals zween rechte ausmachen, so sind jedesmal die Linien parallel.

Beweis. 1. Von dem einen Durchschnitspunkte S lasse man die senkrechte Linie SR fallen, und aus dem andern Durchschnitspunkte P ziehe man die Linie PQ, so mit SR parallel angenommen wird, so wird, da diese beide Parallelen von der geraden Linie CD durchschnitten sind, der Winkel CPQ = PRS. §. 54. N. 2. folglich ein rechter Winkel, und die Linie PQ stehet auch auf CD senkrecht §. 42. N. 1. Daher sind die beide Linien PQ und SR die Entfernungen der Linie AB von CD. §. 45. Nun sind in den beiden Dreiecken PQS und SRP die Wechselswinkel QPS = PSR, §. 54. N. 1. und i = m (nach der Voraussetzung) die Seite PS aber ist beiden Dreiecken gemein; daher sind sie gleich und ähnlich, und die Seite PQ = SR. §. 34. Folglich sind die Entfernungen zwischen den beiden geraden Linien AB und CD gleich, und sie selbst daher parallel. §. 52. Desgleichen, wenn k = l, so wird auch i = m, und folget das vorhergehende.

2. Es sei h = m, so ist h = i §. 24. N. 2. und daher auch i = m. folglich sind nach N. 1. die Linien parallel. Desgleichen wenn k = o, so ist o = l und also k = l, folglich sind wie-

derum

derum nach N 1. die Linien parallel. Eben so wird auch geschlossen, wenn g = l und n = i.

3. Es sei h = n; nun ist n = m, §. 24. N. 2. folglich ist h = m, und die Linien sind parallel. N. 2.

4. Es sei k + m = 180°. Nun ist k + i = 180°, folglich ist m = i. und daher sind die Linien parallel. N. 1.

5. Es sei n + g = 180°, Nun ist n + l = 180° folglich g = l; daher sind wiederum die Linien parallel. N. 2.

So oft sich also eine von den 5. obigen Eigenschaften von zwoen Linien, so durch eine dritte durchschnitten sind, erweisen läst, so sind dieselben parallel, und können daraus mancherlei Methoden, Parallellinien zu ziehen, hergeleitet werden.

Lehrsatz.

Fig. 32. §. 56. Wenn zwo Parallelen AB und CD von zwo andern Parallelen EF und GH durchschnitten werden, so sind die gegen überstehende abgeschnittene Stücke, IK und LM, wie auch IL und KM einander gleich; und wenn umgekehrt vier Linien sich auf solche Art durchschneiden, daß die überstehende Stücke einander gleich werden, so lauffen die Linien parallel.

Beweis. 1. Man ziehe die Linie IM, so ist in den beiden Dreiecken IKM und ILM der Winkel n = o und q = p. §. 54. N. 1. die Seite IM gehört aber zu allen beiden, folglich

lich sind sie einander gleich und ähnlich §. 34. und daher IK = LM, und IL = KM.

2. Wenn IK = LM, und IL = KM, so sind in den beiden Dreiecken IKM und ILM alle drei Seiten gleich, folglich auch die Dreiecke selbst und ihre gleichnamige Winkel §. 35. daher ist n = o und AB mit CD parallel §. 55. N. 1. wie auch q = p, und also auch EF mit GH parallel.

Aufgabe.

§. 57. Durch einen gegebenen Punkt C zu einer gegebenen geraden Linie AB eine Parallel zu ziehen. Fig. 33.

Auflösung. Erste Art. 1. Lasset von dem Punkte C die Perpendikular CE herab.

2. Auf einem andern in der Linie AB willkührlich erwählten Punkte D richtet eine Perpendikular auf, und machet DF = CE.

3. Durch die beide Punkte F und C ziehet eine gerade Linie, welche mit AB parallel sein wird. §. 52.

Zwote Art. 1. Ziehet zu einem in der Linie AB willkührlich erwählten Punkte D die Linie DC.

2. Machet den Winkel DCF = CDE §. 27. und ziehet die Linie FC, so ist solche, da die Wechselswinkel gleich sind, mit AB parallel §. 54. N. 1.

Fig. 34. Zu Ziehung der Parallellinien bedienet man sich auf dem Papier sehr vielfältig des hölzernen Dreiekes, welches man mit der einen Seite an die gegebene Linie CD mit der andern aber an ein Lineal leget, hierauf mit unverrücktem Lineal bis an den gegebenen Punkt A oder so weit als es die verlangte Entfernung der Parallelen erfordert, schiebet, und die Linie AB ziehet, wo also iederzeit der aussere und der innere Winkel gleich werden.

Sind aber Parallelen auf dem Felde zu ziehen, so bedienet man sich dabei der Schnüre, entweder zu Ziehung der Perpendikularen oder zu Uebertragung der Winkel, wobei man iederzeit den Lehrsaz §. 55. vor Augen haben mus. Wie aber Parallelen zu unzugänglichen Linien insbesondere zu ziehen sind, wird an seinem Orte vorkommen.

Viertes Hauptstück.

Von der Kreislinie und ihren Eigenschaften.



Lehrsaz.

§. 58.

Fig. 35. Wann eine Linie DC aus der Mitte einer Sehne AB nach dem Mittelpunkt C ihres Bogens gezogen wird, so stehet sie perpendikular auf der Sehne.

Be-

Beweis. Ziehet nach dem Mittelpunkt C die Linien AC und BC, und betrachtet, daß sie Radien des Bogens AEB, und folglich einander gleich sind; da aber nach der Bedingung DC auf der Mitte von AB stehet, so ist AD = DB, und derowegen mus DC perpendikular auf AB sein. §. 46. N. 2.

Zusatz.

§. 59. Weil aus einem Punkt D einer Linie AB nur eine Perpendikular DC gezogen werden kan, §. 43. so mus 1. die aus dem Mittel einer Sehne gezogene Perpendikular, durch den Mittelpunkt ihres Bogens gehen.

2. Eine Linie CD die aus dem Mittelpunkt C eines Bogens einer Sehne AB perpendikular auf dieselbe gezogen wird, mus sie in zween gleiche Teile AD und DB teilen.

3. Wenn die Sehne in zween gleiche Teile geteilet wird, so mus es auch der Bogen AEB und der Winkel ACB werden.

Aufgabe.

§. 60. Durch drei Punkten A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, einen Zirkel zu ziehen. Fig. 36.

Auflösung. Ziehet die drei gegebene Punkten mit Linien zusammen, und sehet dieselbe als Sehnen eines Zirkels an. Beschreibet aus A und B Bögen in G mit beliebiger aber glei-

cher

cher Eröfnung des Zirkels, und eben dieses verrichtet man nochmals aus A und B auf der andern Seite in F. und ziehet durch die Durchschnitte dieser Bögen die Linie GF. Das nemliche bewürket man auch auf der andern Sehne BC in D und E, so wird der Mittelpunkt des verlangten Zirkels so wohl in der Linie GF als auch in DE sein §. 59. folglich in ihrem Durchschnitspunkte X. woraus dann mit der Eröfnung XA der Zirkel durch die drei gegebene Punkte gezogen werden kan.

Zusatz.

§. 61. Da die zwo gerade Linien GF und DE sich nur in einem Punkte durchschneiden können, so kan auch durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur ein Zirkel gezogen werden.

Zusatz.

§. 62. Auf diese Art läßt sich dann auch der Mittelpunkt zu einen gegebenen Zirkel finden, wenn man auf dessen Umkreis zwo Sehnen nach Belieben annimt, und übrigens so verfähret, wie wir angezeiget haben.

Zusatz.

Fig. 37. §. 63. Wäre ein Zirkel gegeben, und solte dessen Mittelpunkt X gefunden werden, man hätte aber nicht Gelegenheit ausser demselben

Bö-

Bögen zu ziehen, so ziehet eine beliebige Sehne AB, errichtet aus ihrer Mitte N eine Perpendikular DE, so wird sie durch den Mittelpunkt des Zirkels gehen, §. 59: und folglich ein Diameter sein. Weil aber der Diameter aus zween Radien bestehet, §. 12. so mus der Punkt X, wenn man DE in zween Teile teilet, der Mittelpunkt sein.

Man wird durch drei in gerader Linie liegende Punkte niemals einen Zirkel beschreiben können, weil die Perpendikularen, die man auf die zwo Sehnen ziehen wolte, parallel sind, und folglich sich niemals durchschneiden können.

Lehrsatz.

§. 64. Zwo Sehnen AB und CD, die mit einander parallel laufen, fassen gleiche Bögen AC, und BD zwischen sich. Fig. 38.

Beweis. Ziehet aus dem Mittelpunkt F eine Linie FE perpendikular auf AB und CD, so werden so wohl die beiden Sehnen als ihre Bögen AEB und CED in E in zween gleiche Teile, und zwar der erste in AE und EB, und der andere in CE und ED geteilet sein, §. 59. nimt man aber von AE den Bogen CE, und von EB den Bogen ED hinweg, so verbleibet AC = DB, und also sind die zwischen zwo parallel laufenden Sehnen enthaltene Bögen eines Zirkels einander gleich.

Zusaz.

Fig. 39. §. 65. Man kan also nach diesen Lehrsatz zu einer Linie AB durch einen ausser demselben gegebenen Punkt C eine Parallel DC führen, wenn man aus einem nach Belieben angenomenen Punkt E, mit der Eröfnung EC zween Bögen CB und AD beschreibet, AD=CB machet, und die Linie DC ziehet.

Erklärung.

Fig. 40. §. 66. Wenn auf einer Ebene eine gerade Linie AB dergestalt an den Umkreis eines Zirkels gezogen wird, daß sie nur einen einzigen Punkt C damit gemein hat, alle übrige Punkte derselben aber ausserhalb des Zirkels fallen, so berühret sie ihn, und heisset die Tangente davon; welche demnach auch den Zirkel nicht an mehrern Orten durchschneiden kan.

Lehrsaz.

§. 67. Wenn auf dem Endpunkte C des Halbmessers DC in dem Umkreise des Zirkels eine Perpendikular AB errichtet wird, so ist sie eine Tagente; und umgekehrt; eine jede Tagente mus auf dem Endpunkte des Halbmessers senkrecht stehen.

Beweis. 1. Man erwähle sich auf der Linie AB ausser dem Punkte C einen jeden andern beliebigen Punkt E, und ziehe solchen mit dem Mittelpunkte des Zirkels D zusammen.

Weil

Weil nun DC auf AB senkrecht stehet, so ist sie die kürzeste Linie, so von dem Punkte D darauf gezogen werden kan, §. 44. folglich ist DE > DC um EF. folglich ist auch der Punkt E weiter als F von D entfernet, und mus also ausserhalb des Zirkels fallen. Da nun eben dieses von allen Punkten, so ausser C auf der Linie AB angenommen werden können, auf gleiche Art erwiesen werden kan, so hat die Linie AB nur den einzigen Berührungspunkt C mit dem Zirkelkreise gemein, und alle übrige Punkte derselben fallen ausserhalb; Folglich ist sie ein Tagente davon §. 66.

2. Man nehme an, die Tagente AB stehe nicht auf DC senkrecht, so kan doch aus D eine Perpendikular darauf gezogen werden. Nun nehme man DE dafür an. Sie mus also kürzer sein als DC §. 44. Da aber auch, vermöge der Erklärung der Tagente, der Punkt E ausserhalb des Zirkels gelegen §. 66. folglich von D weiter als der Punkt F entfernet sein mus, so ist DE > DF folglich auch grösser als DC. Welches ein Wiederspruch. Folglich mus die Tagente auf das Ende des Halbmessers senkrecht stehen.

Zusatz.

§. 68. Zwischen der Tangente und dem Zirkelkreise kan keine gerade Linie mehr gezogen werden; oder: ausser der Tangente kan durch

den Berührungspunkt C keine gerade Linie mehr gezogen werden, so nicht den Zirkel durchschneiden solte, wenigstens wenn sie verlängert wird. Denn man nehme die Linie CG dafür an, so kan doch eine Perpendikular DH darauf gefället werden. Da nun solche kürzer als DC §. 44. folglich auch kürzer als DI, so ist der Punkt H dem Mittelpunkte des Zirkels D näher als der Punkt I, und fält also innerhalb des Zirkels. Folglich liegt die Linie CG nicht mehr zwischen dem Kreise und der Tangente.

Zusatz.

Fig. 41. §. 69. Der Halbmesser stehet nicht nur auf der Tagente, sondern auch auf dem Kreise selbsten senkrecht. Denn wenn der Winkel CAB = DAB angenommen wird, so decken sie sich §. 19. und weil AC = AD, so fält der Punkt D auf C. Auf gleiche Art fält der ganze Bogen BD auf BC, und daher machet der Halbmesser zu beiden Seiten gleiche Neigungen und Winkel, und stehet deswegen auf dem Umkreise senkrecht. §. 41.

Zusatz.

Fig. 42. §. 70. Wenn eine Sehne AB eines Zirkels, die mit dem Durchmesser CD parallel lauft, sich in dieser Richtung immer weiter von dem Mittelpunkt O entfernet, so entstehen folgende Eigenschaften:

1. Die

1. Die Sehne, ie weiter sie vom Mittelpunkt abstehet, wird immer kürzer, und also auch ihr Bogen; und die zween Berührungspunkte an dem Umkreise kommen immer näher zusammen.

2. Die Sehne machet mit IO, die auf CD perpendikular ist, allezeit einen rechten Winkel.

3. Wenn die Sehne bis an den Umkreis in I gekommen sein wird, so werden die Berührungspunkten E, F, oder G, H einander unendlich nahe sein, und gleichsam in einen Punkt I zusammen fliessen, sie ist also damals unendlich klein, und kan für den Bogen selbst genommen werden.

4. Die von den verschiedenen Berührungspunkten AB, EF, GH auf den Durchmesser CD gezogene Perpendikularen kommen immer näher zusammen, vereinigen sich endlich ganz in IO, und sind alsdann dem Radius gleich.

5. Ist die Sehne bis in I gekommen, so wird nur der mittlere Punkt derselben den Umkreis berühren, die andere werden alle ausser demselben liegen; sie höret also auf, eine Sehne zu sein, und wird eine Tangente.

Zusatz.

71. Wenn man also zu einem auf einen Umkreise gegebenen Punkt eine Tangent setzen soll, so ziehet man nur einen Radius nach demselben, und errichtet darauf eine Perpendikular.

Zusatz.

§. 72. Da aus einem Punkt einer Linie nur ein Perpendikular gezogen werden kan, und die Tangente am Ende eines Halbmessers perpendikular zu stehen komt, so kan auch auf einen Punkt eines Umkreises nur eine Tangent gezogen werden.

Zusatz.

Fig. 43. §. 73. Wenn man CD perpendikular auf AB errichtet, hierauf in der Linie CD verschiedene Mittelpunkte E, F, G erwählet, und mit den Radien EC, FC, und GC eben so viele Kreise ziehet, so ist AB zu einem jeden eine Tangent, und die Umkreise berühren sich in dem Punkte C allein.

Zusatz.

§. 74. Zween Umkreise, deren Radien IC, GC in einen Punkt C in gerader Linie zusammen stossen, berühren sich nur in dem Punkt C, weil die aus demselben errichtete Perpendikular AB so wohl zu einem als zu dem andern eine Tagent ist. Um also einen Umkreis zu ziehen, der einen andern in einem gegebenen Punkt C berühret, mus man ihre Radien in gerader Linie setzen.

Aufgabe.

Fig. 44. und 45. §. 75. Es sei ein Umkreis, dessen Radius AC ist, nebst einen Punkt D ausser oder inner dem-

demselben gegeben, man solle einen andern Umkreis ziehen, der den gegebenen in C berühret, und zugleich durch D gehet?

Auflösung: Ziehet die zween Punkte C, D mit einer geraden Linie zusammen, so stellet sie eine Sehne des zu machenden Umkreises vor, ziehet hierauf durch ihre Mitte eine Perpendikular FG, so mus sie durch den Mittelpunkt des neuen Umkreises gehen. §. 59. Da sich nun die zween Umkreise in C berühren sollen, so müssen ihre Radien daselbst in geraden Linien zusammen stossen, §. 74. verlängert dahero, wenn es nöhtig ist, den Radius AC bis er die Perpendikular FC in B durchschneidet, so wird dieser Durchschnittspunkt den Mittelpunkt des neuen Umkreises abgeben, den man mit der Eröfnung BC = BD ohne Anstand ziehen kan.

Zusatz.

§. 76. Auf die nehmliche Art hat man zu verfahren, wenn man einen Umkreis zu ziehen hätte, der eine gerade Linie AE in einem Punkt C berühren, und durch einen andern D ausser denselben gehen solle. Fig. 46.

Lehrsatz.

§. 77. Ein Winkel, dessen Spitze am Umkreise eines Zirkels stehet, ist die Hälfte von

dem Winkel, dessen Spitze in dem Mittelpunkt selbst, und auf der nehmlichen Sehne sich befindet.

Beweis. Erster Fal: Wenn ein Schen-
Fig. 47. kel AB des Winkels BAD am Umkreise durch den Mittelpunkt C gehet, so ziehet zum andern Schenkel AD desselben eine Parallel EF, die durch den Mittelpunkt C gehet, und betrachtet, daß der Winkel BCF = ECA §. 24. N. 2. nicht minder, daß ECA = FCD §. 64. also ist auch FCD = BCF; oder der Winkel BCD am Mittelpunkt wird durch CF in die Hälfte geteilet. — Nun aber ist BCF = BAD §. 54. also ist der Winkel, dessen Spitze am Umkreise eines Zirkels stehet, die Hälfte von dem Winkel, dessen Spitze am Mittelpunkt ist.

Zweiter Fal: Wenn der Mittelpunkt
Fig. 48. C innerhalb der zween Schenkel AG, und AD fält, so ziehet erstlich den Durchmesser AB, und dann eine Parallel CI zu AG, und eine andere CF zu AD, so ist der Winkel GAB + BAD = GAD, und GCB + BCD = GCD. Nun aber haben wir im ersten Fal schon erwiesen, daß GAB $= \frac{GCB}{2}$, und BAD $= \frac{BCD}{2}$, also ist auch GAD $= \frac{GCD}{2}$.

Drit-

Dritter Fal: Wenn der Mittelpunkt C außerhalb der zween Schenkeln GA, und DA fält, so ziehet durch A und C den Durchmesser AB, und betrachtet, daß nach dem ersten Fal GAB $= \frac{GCB}{2}$, und DAB $= \frac{DCB}{2}$; ziehet man nun DAB von GAB, und DCB von GCB ab, so mus auch der Unterschied GAD $= \frac{GCD}{2}$ sein. Fig. 49.

Zusatz.

§. 78. Weil die Winkel am Mittelpunkt, die auf gleichen oder den nehmlichen Sehnen stehen, einander gleich sind, die Winkel DAE, DBE, DCE, EAF, EBF, ECF aber die Hälften von DIE = EIF sind, so folget, daß die auf die Winkel, die ihre Spitze am Umkreis haben, und auf einerlei, oder gleichen Sehnen DE oder EF sein, aber auf einer Seite derselben stehen, einander gleich sein müssen. Fig. 50.

Zusatz.

§. 79. Zween Winkel DAF und DEF, so auf einer Sehne DF, und jeder mit seiner Spitze auf einer andern Seite derselben stehen, machen beide zusammen 180° aus. Dann der erstere hat den halben Bogen DEF, und der andere den halben Bogen DAF zu seinem Maas, diese zween Bögen zusammen genohmen,

 ma-

machen aber den ganzen Umkreis aus, und die Hälfte davon, so die Winkel zu ihren Maas haben, mus nothwendig 180° machen.

Zusatz.

§. 80. Wenn ein Winkel, dessen Spitze an dem Umkreis ist, auf der grösten Sehne,
Fig. 51. welches der Durchmesser AD ist, stehet, seine Spitze mag auch in B, C, E, oder wo immer sein, so hat er die Hälfte des halben Umkreises, das ist 90° zu seinem Maas, und folglich ist er allezeit ein rechter Winkel. Dieses giebt uns Gelegenheit zu nachstehenden zwo Aufgaben.

Aufgabe.

Fig. 52. §. 81. Am Ende einer Linie AB eine Perpendikular BC zu errichten?

Auflösung: Ziehet aus A und B mit beliebiger Eröfnung zween sich in D durchschneidende Bögen von gleichen Radien durch A und D eine Linie AC von unbestimter Länge. Aus D beschreibet mit der Eröfnung DA = DB den Bogen CBA, durch den Punkt C aber, wo denselben die Linie AC durchschneidet, ziehet die Linie CB, welche Perpendikular auf AB sein wird, weil AC ein Durchmesser, der Winkel CBA aber auf demselben, und mit seiner Spitze am Umkreis stehet.

Auf-

Aufgabe.

§. 82. Aus einem ausser einem Umkreis gegebenen Punkt D eine Tangente DA zu ziehen. Fig. 53.

Auflösung: Ziehet aus dem Mittelpunkt C nach D eine Linie, teilet sie in B in zween gleiche Teile, beschreibet mit der Eröfnung BC den halben Umkreis CAD, und aus dem Durchschnitspunkt A führet eine Linie nach D, so wird diese die verlangte Tangent sein. Dann ziehet man noch AC, so stehet der Winkel CAD auf dem Durchmesser CD, und mit seiner Spitze am Umkreis, derowegen ist er ein rechter §. 80. und da AC ein Radius ist, und DA einen rechten Winkel damit machet, so mus AD eine Tangent sein §. 67.

Zusatz.

§. 83. Ferner folget aus dem vorigen Lehrsatz, daß wenn ein Winkel DAF auf einer kleinern Sehne DF, als der Durchmesser ist, und mit seiner Spitze in dem grössern Teil des Umkreises stehet, so ist er allezeit ein spitziger, ist aber im Gegenteil seine Spitze im kleinern Bogen in E, so ist DEF ein stumpfer Winkel. Denn ieder hat die Hälfte des Bogens, der auf der andern Seite der Sehne ist zu seinem Maase; da nun die Hälfte des Bogens DEF kleiner als 90°, und die Hälfte von Fig. 50.

DACF

DACF grösser als 90° sein mus, so mus auch DAF spitzig, und DEF stumpf sein.

Lehrsatz.

Fig. 54. §. 84. Ein Winkel BAC, den eine Tangent AB, und eine Sehne AC machet, und dessen Spitze in den Berührungspunkt A ist, hat die Hälfte des Bogens, den die Sehne abschneidet, und zwischen AB, und AC begriffen ist, zu seinem Maas.

Beweis. Ziehet erstlich EC Parallel mit FB, und dann auch EA, und den Radius AD, so wird derselbe so wohl auf FB, als EC Perpendikular stehen §. 53. und die Sehne EC in G in zween gleiche Teile teilen §. 59. N. 2. folglich ist das Dreieck EGA = CGA §. 33. und also der Winkel AEC = ACE. Nun aber ist der Winkel BAC = ACE, §. 54. daher ist auch BAC = AEC. Der Winkel AEC aber hat die Hälfte des Bogens AC zu seinen Maas §. 77. also hat auch der Winkel BAC, den eine Tangent, und eine Sehne machen, die Hälfte des Bogens, den die Sehne abschneidet zu seinen Maas.

Aufgabe.

Fig. 55. §. 85. Auf einer Linie AB als auf einer Sehne einem Zirkel zu beschreiben, in dem alle Winkel wie AEB am Umkreis einem gegebenen O gleich sind?

Auf-

Auflösung: Machet die beide Winkel BAC, und ABC dem gegebenen O gleich, errichtet aus A, und B Perpendikularen auf AC und BC, und ziehet aus dem Durchschnitspunkt D derselben mit einem Halbmesser DA oder DB einen Zirkel, so werden alle Winkel wie AEB am Umkreis desselben den Winkeln BAC, und ABC nach vorigem Lehrsatz gleich sein, und weil diese dem gegebenen O gleich sind, so wird auch AEB = O sein.

Lehrsatz.

§. 86. Wenn sich zwo Sehnen BE, und CD innerhalb des Umkreises in einem Punkt A durchschneiden, so hat der Winkel DAE die halbe Summe der zween Bögen BC, und DE zu seinem Maas. Fig. 56.

Beweis. Ziehet die Linie BF parallel zu DC, und betrachtet, daß der Winkel FBE = DAE §.54. N.2. nicht minder, daß er die Hälfte des Bogens FDE, oder welches einerlei ist, den halben Bogen FD + den halben Bogen DE zu seinen Maas habe §. 77. Da aber der Bogen FD = BC ist, §. 64. so ist auch der halbe Bogen BC + den halben Bogen DE das Maas des Winkels FBE, und weil FBE = DAE, so ist auch der halbe Bogen BC + den halben Bogen DE das Maas des Winkels DAE.

Lehr-

Lehrsaz.

Fig. 57. §. 87. Wenn zwo Sehnen DC, und EB ausser dem Umkreis so weit verlängert werden, bis sie in einem Punkt A zusammen laufen, so hat der Winkel DAE den halben Bogen DE weniger den halben Bogen CB zu seinem Maas.

Beweis. Ziehet CF parallel zur Sehne BE, so wird der Winkel DCF = DAE, §. 54. N. 2. und DCF wird den halben Bogen DF, oder welches einerlei ist, den halben Bogen DE weniger, den halben Bogen FE zu seinen Maas haben §. 77; der Bogen FE aber ist = CB, §. 64. und also auch ihre Hälften; folglich hat der Winkel DCF = DAE den halben Bogen DE weniger den halben Bogen CB zu seinem Maas.

Noch mehrere Eigenschaften, die aus verschiedenen Stellungen der geraden Linien in Ansehung des Zirkels entstehen, sollen noch weiter unten an seinem Orte vorkommen.



Fünf-

Fünftes Hauptstück.

Von dem Umkreise und den Winkeln der geradlinichten Flächen und Vielecken insbesondere der Dreiecken

Erklärung.

§. 38.

Da zwo gerade Linien keinen Raum einschliessen können, §. 10. aber wohl mehrere, wenn nehmlich iede derselben kürzer ist, als die übrigen zusammen genommen, so giebt es eben so viele Gattungen von geradlinigten Flächen, als Seiten zu Einschliessung derselben vorhanden sind, wovon das Dreieck die erste ist. §. 31. Da nun auch diese Einschliessende Seiten bei ihrer Zusammenstossung eben so viele Winkel oder Ecke machen, als ihre eigene Anzahl beträgt, so werden sie auch nach der Anzahl ihrer Winkel benennet. Daher ist eine Fläche oder Figur von drei Seiten, oder auch von drei Winkeln, ein Dreieck; von vier Seiten oder Winkeln ein Viereck; von fünf Seiten oder Winkeln ein Fünfeck, u. s. w. und überhaupt wird eine Fläche so vielseitig genennet, als Seiten zum Einschlusse, oder aus denselben entstehende Winkel

kel vorhanden sind. Insgemein aber werden diejenige, so von mehr als drei Seiten eingeschlossen sind, **Vielecke** (Polygonum) genennet.

Erklärung.

§. 89. Wenn in einer geradlinigten Figur alle Seiten und Winkel einander gleich sind, so ist es regelmässig **regulär**; ist aber das Gegenteil, so wird es unregelmässig **irregulär** genennet. Daher entstehet dann der Unterschied der **regelmässigen** und **unregelmässigen Vielecken**. Die Seiten selbst, so das Vieleck einschliessen, heissen die **Polygonseiten**, und die davon eingeschlossene Winkel die **Polygonwinkel**, und endlich die gerade Linie, so von dem Scheitelpunkt eines Polygonwinkels bis zu einem andern nicht zunächst gelegenem gezogen wird, heist eine **Diagonal**.

Lehrsaz.

§. 90. In iedem Dreieck machen die drei
Fig. 58. Winkel zusammen genohmen 180° aus.

Beweis: Verlängert die Seite AB unbestimt bis in E, und ziehet BD parallel mit AC, so ist der Winkel BAC = EBD, und BCA = DBC §. 54. Da aber EBD + DBC + CBA = 180°, §. 21. so ist auch der Winkel BAC + BCA + CBA = 180°.

Zu-

Zusatz.

§. 91. Es ist also in iedem Dreiecke der Winkel EBC, den man den äussern zu nennen pfleget, gleich den zween innern BAC, und BCA zusammen genohmen.

Zusatz.

§. 92. In iedem Dreieck kan nicht mehr als ein rechter, um so mehr nur ein stumpfer Winkel enthalten sein, weil, wenn derselben zween wären, sie schon 180° ausmachten, folglich für den dritten nichts mehr übrig bliebe. Es können aber wohl alle drei Winkel spitzig sein.

Zusatz.

§. 93. Wenn man in einem Dreiecke zween Winkel kennet, so lässet sich allezeit der dritte finden; denn wenn man die Summe der bekanten von 180° abziehet, so ist der Ueberrest gleich dem dritten §. 90.

Zusatz.

§. 94. Da in einem rechtwinklichten Dreieck der rechte Winkel schon gegeben ist, so hat man nebst diesem nur noch einen zu kennen nöhtig, um den dritten finden zu können.

Zusaz.

§. 95. Die zween spitzige Winkel in einem rechtwinklichten Dreieck müssen zusammen allezeit 90° ausmachen.

Zusaz.

§. 96. Hat man in was immer für einem Dreieck nur einen Winkel bekant, so kan man wenigstens die Summe der zween andern finden, weil sie nach Abzug des bekanten von 180° dem Ueberrest gleich ist.

Lehrsaz.

§. 97. In Jedem Dreieck wird die gröste Seite dem grösten Winkel, und die kleinste dem kleinsten entgegen gesetzet, und umgekehrt.

Fig. 59. **Beweis**: Weil um iede drei Punkten die nicht in gerader Linie liegen, ein Zirkel beschrieben werden kan, §. 60. so gehet dieses auch bei iedem Dreieck an, und man kan alsdann die Seiten AB, BC, CA als Sehnen, die Winkel ABC, BCA, CAB aber als Winkel am Umkreis ansehen. Da nun diese Winkel um so grösser sind, auf einer ie grössern Sehne sie stehen, §. 13. N. 6. so folget, daß die gröste Seite eines Dreiecks dem grösten Winkel, und die kleinste dem kleinen entgegen gesetzet sei, und umgekehrt.

Zu-

Zusatz.

§. 98. Weil §. 78. gleiche Winkel auf gleichen Sehnen stehen, so hat auch ein Dreieck so viel gleiche Seiten, als es gleiche Winkel enthält, und umgekehrt. Derowegen sind in einem gleichseitigen Dreieck alle drei Winkel gleich, und ieder mus von 60° sein, weil $\frac{180°}{3} = 60°$ ist. Daher ist auch ein iedes gleichseitiges Dreieck zugleich regulär §. 89. und **umgekehrt**; wenn alle drei Winkel eines Dreieckes gleich sind, so ist es auch zugleich gleichseitig.

Zusatz.

§. 99. In einem ieden gleichschenklichten Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie, d. i. welche an der ungleichen Seite liegen, einander gleich, weil, wenn ein Zirkel herum beschrieben wird, diese beide Winkel auf gleichen Sehnen zu stehen kommen. Ferner **umgekehrt**: wenn in einem Dreieck zween Winkel gleich sind, so ist es gleichschenklicht §. 31.

Zusatz.

§. 100. Kennet man in einem gleichschenklichten Dreiecke einen Winkel, so lassen sich

auch die andern leicht finden; denn ist einer von den zween gleichen gegeben, so ziehet man ihn doppelt genohmen, von 180° ab, der Ueberrest giebt den dritten; ist es aber der ungleiche, so ziehet ihn von 180° ab, und den Ueberrest dividiret durch 2, so wird der Quotient einer von den zween gleichen Winkeln sein.

Aufgabe.

§. 101. Ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen gleich ist?

Fig. 60. Auflösung: Wenn ABC das gegebene Dreieck ist, so ziehet eine Linie DE = AB, mit der Eröffnung AC beschreibet aus D den Bogen op, und mit BC aus E den Bogen nm; dann ziehet aus dem Durchschnit F dieser Bögen die Seiten FD, und FE, so ist das Dreieck DFE = ABC §. 35.

Zusatz.

§. 102. Zur Beschreibung und Zeichnung eines Dreieckes werden überhaupt nohtwendig drei Stücke, durch welche es bestimmet wird, erfordert, nehmlich entweder 1. zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, §. 33. oder 2. eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln §. 34. oder 3. alle drei Seiten §. 35. durch deren gehörige Zusammensetzung das

Drei-

Dreieck gezeichnet werden kan. Die vorhergehende Auflösung der Aufgabe ist auf den leztern Fal eingerichtet.

Zusatz.

§. 103. Aus zwoen Seiten und einem Winkel, der nicht zwischen ihnen begriffen ist, wird zwar ein Dreieck noch nicht algemein und durchgängig bestimt §. 33. iedoch geschiehet solches in zween besondern Fällen, 1. wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, §. 51. und 2. wenn der gegebene Winkel stumpf ist, folglich ieder der beiden übrigen nohtwendig spitzig sein mus §. 92. Denn wenn die Seite BC und CA, dann der stumpfe Winkel r gegeben sind, so kan die Linie AB von AC nur in dem einzigen Punkte A durchschnitten werden. Wolte man annehmen, sie würde auch noch in einem andern Punkte, z. B. in D durchschnitten, so wäre das Dreieck ACD gleichschenklicht, folglich der Winkel CAD = CDA. §. 99. Weil aber der Winkel r stumpf ist, so mus CDB spitzig §. 92. folglich CDA nohtwendig stumpf sein, §. 21. folglich auch der Winkel CAD. Es wären demnach in einem Dreiecke zween stumpfe Winkel; welches unmöglich. §. 92. Daher kan der Durchschnitspunkt nirgens als in A sein, und das stumpfwinklichte Dreieck ist durchgängig bestimt. Fig. 61.



Sechstes Hauptstück.

Von dem Umkreise und den Winkeln der übrigen Vielecke.

Erklärung.

§. 104.

Ein regelmässiges Viereck, d. i. in welchem die vier Seiten und die vier Winkel einander gleich sind, §. 98. wie ACDB ist ein Quadrat. Sind zwar die vier Winkel gleich, aber nur die überstehende Seiten, so ist es ein Rechteck (Rectangulum) wie EFGH.

Fig. 62.
Fig. 63.

Zusatz.

§. 105. 1. Wenn man in einem Viereck, es sei regulär oder nicht, die Scheitel der zween gegen über stehenden Winkel durch eine gerade Linie zusammen ziehet, so wird es dadurch in zwei Dreiecke geteilet. Da nun die Winkel in iedem derselben 180° ausmachen, §.90. so enthalten alle vier Winkel eines ieden Vierecks zusammen 360°.

2. Weil in einem Quadrat so wohl als in einem Rechteck die Winkel gleich sind, so ist ein ieder derselben ein rechter Winkel, oder

hat

hat 90°, und die Seiten derselben stehen auf einander senkrecht §. 42.

3. Aus eben diesem Grunde laufen in beiden die überstehende Seiten mit einander parallel. §. 54. N. 4.

Erklärung.

§. 106. Ein Viereck, dessen vier Seiten zwar einander gleich, die Winkel aber ungleich sind, ist ein **Rhombus**; wie FCEI und wenn nur die überstehende Seiten einander gleich sind, so ist es ein **Rhomboides** wie PEON. Fig. 64. Fig. 65.

Zusatz.

§. 107. Wenn man so wohl den Rhombus als Rhomboides durch die Diagonal in zween Dreiecke teilet, so sind in diesen Dreiecken die gleichnahmigte Seiten einander gleich, folglich auch die Dreiecke selbst und ihre gleichnahmige Winkel §. 106. Daraus fliesset demnach: 1. daß in beiden die überstehende Winkel einander gleich sind, und 2. daß die gegen über stehende Seiten mit einander parallel laufen. §. 55. Aus dieser Ursache wird auch der Rhombus öfters ein **verschobenes Quadrat**, und der Rhomboides ein **verschobenes Rechteck** genennet.

Erklärung.

§. 108. Ein iedes Viereck, dessen gegen überstehende Seiten mit einander parallel lau-

 fen

sen, heist ein Parallelogrammum. Da nun so wohl das Quadrat als auch Rechteck, Rhombus und Rhomboides Parallelogrammen sind, §. 105. 107. so kan auch das erste ein gleichseitiges rechtwinklichtes, das zweite ein länglich rechtwinklichtes, das dritte ein gleichseitig schiefwinklichtes, und das vierte ein länglichschiefwinklichtes Parallelogrammum genennet werden. Ferner mus auch umgekehrt ein iedes Parallelogrammum eines von diesen vieren sein.

Erklärung.

Fig. 66. §. 109. Ein Viereck CMRS, dessen zwo entgegen stehende Seiten gleich, zwo aber ungleich, iedoch parallel sind, ist ein Trapezium, wenn man daher in demselben die zwo Perpendikularen CT und MV fallen läst, so erhellet, daß die zween an ieder der Parallelen liegende Winkel einander gleich sind. §. 51.
Fig. 67. Ein Viereck DEIL, in welchem alle vier Seiten und Winkel ungleich sind, ist ein Trapezoides.

Erklärung.

§. 110. Da die Polygonwinkel eines Vielecks durch die Zusammenstossung der Polygon-
Fig. 68. seiten entstehen, §. 89. so sind sie zwiefach; entweder ausgehend (ausspringend, angle saillant) wie ABC, wenn die Spitze auswerts,

oder eingehend (angle rentrant) wie GFE, wenn die Spitze einwerts stehet. Fig. 69.

Lehrsatz.

§. 111. Alle Polygons, die nur aus ausgehenden Winkeln bestehen, und auch einige, die eingehende bei sich haben, können in so viele Dreiecke, die mit einer ihrer Spitzen in einem Punkt zusammen treffen, geteilet werden als sie Seiten haben.

Beweis: Es sei ein Polygon ABCDE, aus lauter ausgehenden, und das andere ABCDEFG auch aus eingehenden Winkeln zusammen gesetzet; so kan man innerhalb derselben einen Punkt O erwählen, von dem man nach allen Polygonswinkeln eine gerade Linie zu ziehen im Stand ist; dadurch aber wird das Polygon in so viele Dreiecke, die ihre gemeine Spitze in O haben, zerteilet, als es selbst Seiten hat, iedoch sehen wir auch, daß man in dem Polygon ABCDEFGHI keinen Punkt finden kan, von welchem man nach allen Polygonwinkeln gerade Linien ziehen könte; also giebt es auch einige, die eingehende Winkel haben, von welchen sich obiges nicht behaupten läßt. Fig. 68. und 69. Fig. 70.

Zusatz.

§. 112. Alle Polygons ohne Ausnahm können durch Diagonalen in so viele Dreiecke, weniger zwei, als sie selbst Seiten haben, zerteilet werden, wobei iedoch zu merken, daß diese Dreiecke nur in Polygons die aus ausgehenden Winkeln bestehen, in einem gemeinen
Fig. 71. Punkt A zusammen treffen können; bei einigen aber, die auch eingehende Winkel haben, kann dieses nicht geschehen, man erwählet derowegen nebst dem Punkt C, in welchem eini-
Fig. 70. ge Dreiecke zusammen stossen, zu den übrigen noch einen andern D.

Lehrsatz.

§. 113. Die Summe der Polygonwinkel eines Vielecks, ist gleich 180° multiplicirt durch die Anzahl Seiten weniger zwei, oder machet so vielmal 180°, als Seiten sind weniger 360°.

Fig. 68. **Beweis:** Betrachtet daß dieses Polygon in so viele Dreiecke geteilet ist, als es Seiten hat, und daß die drei Winkel eines ieden 180° ausmachen, §. 90. derowegen ist die Summe dieser Winkel = 180° multiplicirt durch die Anzahl Dreiecken, oder der Anzahl der Polygonseiten. Die Winkel dieser Dreiecken aber, die an den Polygonseiten stehen, machen die Polygonwin-

winkel, und die Winkel an ihrer gemeinschaftlichen Spitze O nach §. 24. N. 5. 360° aus; derowegen ist die Summe aller ausgehenden Winkeln eines Polygons gleich so vielmal 180° als Seiten sind, weniger zwei, oder so vielmal 180° als Seiten vorhanden, weniger 360°.

* Die Anfänger können bei der 69sten Fig. merken, daß der eingehende Winkel GFE grösser als 180° sei, weil man nicht den äussern EFG, sondern den innern OFE + OFG rechnen muß. Uebrigens kan dieser Lehrsaz in der Trigonometrie zur Untersuchung dienen, ob die an einen Polygon gemessene Winkel der gleich oben bestimten Summe gleichen.

Lehrsaz.

§. 114. Wenn man in einen Polygon, das keine eingehende Winkel hat, alle Seiten mit einem Ende auswärts verlängert, so machen alle äussere Winkel zusammen 360° aus.

Beweis. Jeder aussere Winkel CAD ist das Supplement des innern DAB auf 180° §. 21. 23. derowegen machen alle äussere, und innere Winkel eines Polygons zusammen genohmen so vielmal 180° aus, als an denselben Seiten sind; ist aber die Summe der innern Winkel gleich so vielmal 180°, als Seiten sind, weniger zwo, oder weniger 360°; §. 113. also ziehet die Summe der innern Fig. 72.

von

von der Summe der aussern, und innern Winkel ab, so bleibt für die Summe der aussern 360° übrig.

Lehrsatz.

§. 115. Die Summe der äussern Winkel an einem Polygon, welches auch eingehende Winkel hat, ist gleich 360°, mehr so vielmal 180°, als eingehende Winkel vorhanden sind.

Fig. 73. Beweis. Es sei das Polygon ABCDEFG mit zween eingehenden Winkeln; ziehet man nun die Linien AFI und DBH, so ist AFEDB ohne eingehenden Winkel. Die äussern Winkel des erstern sind: MAG, AGF, LFE, KED, RDC, DCB, NBA und des zweiten MAF, IFE, KED, RDB und HBA. Zugleich sehen wir, daß die äussern Winkel des ersten Polygons erstlich um die drei Winkel FAG, AGF, LFI = AFG, und dann noch um die drei CDB, DCB und NBH = CBD grösser sind, als die gesamte äussern Winkel des zweiten; aber sowohl die erstern drei nemlich FAG, AGF und LFI = AFG, als die andern CDB, DCB und NBH = CBD machen 180° aus, weil sie als Winkel der Dreiecke AGF und BCD angesehen werden; und nach §. 114. machen die äussern Winkel des zweiten Polygons 360° aus; addiret man nun zu diesen noch die Winkel FAG, AGF,

AGF, LFI = AFG, und CDB, DCB, NBH = CBD = 180°×2, um die äussern Winkel des ersten Polygons zu bekommen, so ist klar, daß die Summe der äussern Winkel eines Polygons, so auch eingehende Winkel hat, gleich seie 360°, mehr so vielmal 180°, als eingehende Winkel vorhanden.

Lehrsatz.

§. 116. Um ein regelmässiges Polygon kan ein Zirkel beschrieben werden, so daß dessen Ecke alle am Umkreise stehen.

Beweis. Wenn man alle Polygonwinkel wie ABC, BCI, CID u. s. w. die nach §. 89. alle einander gleich sind, in zween gleiche Teile durch die Linien AF, BF, CF u. s. w. teilet, so wird dasselbe in so viele gleichschenklichte Dreiecke AFB, BFC, CFI u. s. w. geteilet, als das Polygon selbst Seiten hat, §. 99. u. 111. Siehet man nun die gleiche Schenkel AF, BF, CF u. s. w. als Radien an, so kan mit denselben ein Zirkel um das Polygon beschrieben werden, so daß dessen Ecke alle am Umkreise stehen. Fig. 74.

Zusaz.

§. 117. Da man die Seiten eines regelmässigen Polygon um welches ein Zirkel beschrieben ist, als gleiche Sehnen von den Bögen, die die Mittelpunktswinkel messen, anse- Fig. 74.

sehen kan, so sind auch 1. alle Mittelpunkts-winkel einander gleich.

2. Da sie alle in der Runde herum liegen; so haben sie zusammen 360°, oder den ganzen Zirkel zu ihrem Maasse.

3. Dividiret man dahero 360° durch die Anzahl der Seiten eines Polygons, so bekomt man den Mittelpunktwinkel AFB.

4. Ziehet man den Mittelpunktswinkel AFB von 180° ab, so verbleibet noch FAB + FBA §. 96; da aber FAB = FAE §. 116. so ist 180° — AFB = FAE + FAB oder den Polygonwinkel.

Zusatz.

Fig. 74. §. 118. Dividiret man nun 360° durch die Anzahl der Seiten eines regelmässigen Sechsecks, so ist dessen Mittelpunktswinkel AFB = 60°; und ziehet man diesen von 180° ab, so verbleiben noch die Winkel FAB + FBA §. 96. und weil endlich FAB = FBA ist §. 116. so ist 180° — 60° = 120°, und $\frac{120°}{2}$ = 60° = FAB = FBA. Daraus schliessen wir:

1. Daß der Polygonwinkel EAB in einen regelmässigen Sechsecke = 120°, und also der halbe FAB oder FBA = 60°.

2. Da AFB = FAB = FBA = 60° ist, so ist auch AF = FB = AB §. 98. derowegen

ist

ist der Radius einer Seite gleich, und es kan also leicht ein regelmässiges Sechseck in einen Zirkel beschrieben werden, wenn man den Radius desselben sechsmal auf dem Umkreise herum träget, und die bemerkte Punkte mit Linien zusammen ziehet.

Zusatz.

§. 119. Wenn eine Linie FG aus dem Mittelpunkt eines Polygons perpendikular auf eine Seite AB desselben gezogen wird, so teilet sie solche 1. in zween gleiche Teile AG, und GB; und wenn sie dieselbe in zween gleiche Teile teilet, so stehet sie perpendikular darauf, §. 46. Fig. 74.

2. Alle Linien wie FG, sind in einem regelmässigen Polygon einander gleich, weil alle gleichschenklichte Dreiecke desselben, wie AFB eines ist, einander gleich sind, und dadurch in zween gleiche rechtwinklichte Dreiecke AFG, und FGB geteilet werden.

Zusatz.

§. 120. Da wir §. 70. N. 3. gesagt haben, daß man einen unendlich kleinen Bogen für eine Sehne, oder diese für ienen annehmen könne, und die Seiten regelmässiger Polygonen als Sehnen betrachtet werden, so kan man auch einen Zirkel als ein regelmässiges

ges

ges Polygon von unendlich kleinen Seiten ansehen.

Aufgabe.

Fig. 75. §. 121. Ein Quadrat in einen Zirkel zu beschreiben?

Auflösung: Ziehet einen Diameter QC, setzet eine Perpendikular BD darauf, und ziehet QB, BC, CD und DQ mit Linien zusammen.

Beweis: Der Winkel QBC hat den halben Bogen QDC zu seinem Maasse §. 77. folglich ist er ein rechter, und das nehmliche lässet sich auch von den andern drei Winkeln des Vierecks behaupten; derowegen sind sie ein ieder von 90°, folglich einander gleich; ferner sind auch ihre entgegen stehende Seiten gleich, §. 56. und daher ist QBCD ein Quadrat, §. 104.

Zusatz.

Fig. 75. §. 122. Da der Mittelpunktswinkel QAR eines Achtecks nur die Hälfte von dem Winkel QAB eines Vierecks ist, so hat man den Bogen QB nur nach §. 50. in zween gleiche Teile QR und RB zu teilen, die Sehne QR achtmal auf dem Umkreise herum zu tragen, und die Linien QR, RB, BE, EC u. s. w. zu ziehen, um ein Achteck zu erhalten. Eben so lässet sich aus einem Sechseck leicht ein

Zwölf-

Zwölfeck, oder aus was immer für einem regelmässigen Polygon ein anders machen, welches eine doppelte Anzahl Seiten hat. Aus den nemlichen Grunde kan man ein solches Polygon in ein anders verwandlen, so nur die halbe Anzahl Seiten hat, indem man nur den Bogen des Mittelpunktswinkels doppelt nehmen darf, oder wann man z. B. aus einem Achteck ein Viereck zu machen hätte, würde man anstatt QR nur QB und so auch die übrige Seiten zu ziehen haben, indem man nur allezeit einen Punkt dazwischen auslassen darf.

Eben so kan man ein gleichseitiges Dreieck ABC in einem Zirkel beschreiben, wenn man erstlich einen Durchmesser CD ziehet, mit dem Radius DO aus D in A, und B Punkten bemerket, hierauf die Seite AB aus A in C, oder auch aus B in C träget, und endlich AB, AC, CB mit Linien zusammen ziehet. Fig. 76.

Da die geometrische Beschreibung eines regelmässigen Fünfecks schon einige Begriffe von Proportionallinien voraus setzet, so müssen wir sie in das künftige Hauptstück versparen. Die geometrische Beschreibung eines Sieben- Neun- und Eilfecks u. s. w. aber müssen wir, da sie von höhern Gründen abhänget, gänzlich übergehen. Doch um sie nur praktisch beschreiben zu lehren, geben wir folgende

Aufgabe.

§. 123. Ein regelmässiges Fünfeck in einen Zirkel zu beschreiben?

Fig. 77. Auflösung: Rechnet nach §. 117. den Mittelpunktswinkel BAC aus, traget ihn aus dem Mittelpunkt des Zirkels auf, ziehet die Linie BC wo die Schenkel den Zirkel durchschneiden, zusammen, traget sie fünfmal auf dem Umkreis herum, und ziehet die bemerkte Punkten mit Linien zusammen.

Auf eben diese Art lassen sich die übrige Polygons, die eine ungerade Anzahl Seiten haben, beschreiben.

Zusatz.

Fig. 77. §. 124. Wäre eine Seite gegeben, und man solte ein regelmässiges Polygon von einer gewissen Anzahl Seiten darauf setzen, so rechnet nach §. 117. zuvor den halben Polygonwinkel ABC aus, traget ihn sowohl aus B als aus C auf, so daß sich ihre Schenkel in einen Punkt A durchschneiden; aus diesem beschreibet mit einem Radius AB oder AC einen Zirkel, so könnet ihr die gegebene Seite BC auf dessen Umkreis so oft herum tragen, als das Polygon Seiten haben sol, und dann die Punkten mit Linien zusammen ziehen.

Uebrigens geschiehet die Beschreibung aller regelmässigen Polygonen am sichersten und zuver-

läs-

lässigsten durch die Trigonometrie, wovon im folgenden.

Aufgabe.

§. 125. Ein unregelmässiges Polygon einem gegebenen gleich zu machen?

Auflösung: Zerteilet das gegebene Polygon DCFEA in beliebige Dreiecke, ziehet die Linie MN = DC, machet das Dreieck MNO = DCA, MNP = DCE, MNR = DCF §. 101. und ziehet die dadurch erhaltene Punkten O, P, R mit Linien zusammen, so ist das Polygon MNRPO = DCFEA, weil sie gleiche Dreiecke enthalten, die eigentlich die Figur ausmachen. Fig. 78.

Siebentes Hauptstück.

Von Proportionallinien.

Erklärung.

§. 126.

Wenn vier Linien so beschaffen sind, daß sich die erste zur zwoten, wie die dritte zur vierten verhält, so werden sie Proportionallinien genennet.

Man hat von den Proportionallinien überhaupt dasienige wieder wohl im Gedächtnisse zu erneuern, was in der Rechenkunst von den Proportionalgrössen gesagt worden. Wobei noch anzumerken, daß, obgleich Linien auch gar wohl in einer arithmetischen Proportion stehen können, doch alhie blos von geometrischen Proportionen die Rede sei, so lange nicht das Gegenteil ausdrücklich angezeiget wird.

Lehrsatz.

Fig. 79. §. 127. Wenn man einen Schenkel AE eines beliebigen Winkels IAE in eine beliebige Anzahl gleicher Teile A, B, C, D, E teilet, dann aus einem dieser Teilungspunkten E eine beliebige Linie EI bis zum andern Schenkel ziehet; zu dieser aber aus allen Teilungspunkten D, C, B, Parallelen DH, CG, BF führet, so wird 1. der andere Schenkel AI in eben so viele gleiche Teile als AE hat, geteilet. 2. diese Teile verhalten sich gegeneinander, wie die Schenkeln, worauf sie sich befinden, d. i. AB: AF = AE: AI.

Beweis: 1. Ziehet durch die Teilungspunkte F, G, H, I mit AE die Parallelen Fm, Gl und Hn, so sind Bc = Fm, CD = Gl, DE = Hn = AB §. 56. ferner ist der Winkel FAB = GFm = HGL = IHn, und der Winkel FBA = GmF = HLG = InH, §. 54. derowegen sind auch die Dreiecke ABF = FmG = GlH = HnI §. 34. also müssen auch

auch ihre gleichnahmigte Seiten AF, FG, GH und HI einander gleich sein, und da so viele Dreiecke entstehen, als auf der Linie AE Teile sind, so müssen auch auf der Linie AI so viele Teile sein als auf der Linie AE.

2. Betrachtet man die zween Schenkel AE und AI, daß sie in einer gewissen Verhältnis stehen, so kan man die Anzahl ihrer Teile, in die sie beide geteilet sind, als eine dritte Grösse ansehen, durch welche die Glieder der Verhältnis dividiret sind. Wenn nun die Glieder einer Verhältnis oder zwo Grössen durch eine dritte Grösse dividiret werden, so verhalten sich die Quotienten wie die Grössen selbst, oder die Verhältnis verbleibt die vorige §. 215. Rechenk. das ist: $AE : AI = \frac{AE}{4} : \frac{AI}{4}$; Nun ist $\frac{AE}{4} = AB = BC = CD$ u. s. w. und $\frac{AI}{4} = AF = FG = GH$ u. s. w.; also verhalten sich die Teile zu einander, wie die Schenkel selbst, d. i. $AB : AF = AE : AI$.

Zusatz.

§. 128. Wenn daher in einem Dreiecke ABC eine Linie DE parallel mit BC gezogen wird, so werden die Seiten AB und AC proportionirt durchschnitten, so daß $AB : AC = AD : AE$, woraus durch die Versetzung der Glieder noch folgende Proportionen fliessen: Fig. 80.

AC: AB = AE: AD
AB: AD = AC: AE
§. 213. Rechenk.
ferners
AB—AD: AD=AC—AE: AE
§. 214. Rechenk.
d. i.
DB: AD = EC: AE.
AD: DB = AE: EC.
AD: AE = DB: EC.
weil nun
AD: AE = AB: AC.
so ist auch
AB: AC = DB: EC.

Zusatz.

§. 129. Wenn ferner durch den Punkt E die Linie EF parallel mit AB gezogen wird, so ist also
AC: AE = BC: BF §. 128.
Nun ist
BF = DE. §. 56.
folglich
AC: AE = BC: DE.
und weil
AC: AE = AB: AD. §. 128.
so ist auch
AB: AD = BC: DE.
AC: BC = AE: DE.
AB: BC = AD: DE.

Zu-

Zusatz.

§. 130. Wenn also eine Linie AB in eine Anzahl Teile geteilet ist, und man erwählet ausser derselben einen beliebigen Punkt C, zu welchem man aus den Teilungspunkten A, F, G, H, B Linien ziehet, so werden dadurch alle mit AB parallel gezogene Linien, wie DE ist, und auch die Linien AC, FC, GC u. s. f. in proportionirte Teile geteilet. Denn man darf nur ein Dreieck wie ACF nach dem andern betrachten, so siehet man nach §. 128. 129. daß CD: AC=DE: AB und CD: AD=CI: IF=CK: KG u. s. w. Fig. 81.

Lehrsatz.

§. 131. Wenn in einem Dreiecke ACB der Winkel C durch eine Linie CD in zween gleiche Teile geteilet wird, so wird die ihm entgegen stehende Seite AB durch dieselbe in zween Teile AD, und DB geteilet, die mit den anliegenden zwoen Seiten AC, und CB in Proportion stehen. Fig. 82.

Beweis: Ziehet BE mit CD parallel, und verlängert AC, bis sie mit BE in einem Punkt zusammen kommt, so ist wegen den Parallelen DC, und BE, der Winkel ACD=CEB, und CBE=DCB §. 54. weil aber ACD=DCB, vermög der Voraussetzung, so ist auch CBE=CEB, und also ist CE=CB, §. 99.

nun aber ist AD: DB = AC: CE §. 128.
und weil CE = CB, so ist auch:

AD : DB = AC: CB und
AD: AC = DB: CB.

Das ist: die zween Teile AD, DB stehen mit ihren anliegenden Seiten in Proportion.

Aufgabe.

Fig. 79. §. 132. Eine gegebene Linie AI in eine verlangte Anzahl gleiche Teile zu teilen?

Auflösung: Ziehet eine Linie AE von beliebiger Länge, doch so, daß sie mit AI weder einen gar zu spitzigen, noch stumpfen Winkel mache; traget so viele willkührliche gleiche Teile AB, BC u. s. w. darauf, als die gegebene AI haben solle; hänget den letzten Punkt E mit I durch eine Linie EI zusammen, und führet mit derselben aus dem auf AE getragenen Teilungspunkten D, C, B, die Parallelen DH, CG, BF, wo nun dieselben die Linie AI durchschneiden, werden die verlangte Teilungspunkte der Linie AI sein, und sie wird in eben so viele gleiche Teile eingeteilet sein, als AE. §. 127.

Aufgabe.

Fig. 83. §. 133. Wenn drei Linien AC, CB und AD gegeben sind, man solle eine vierte geometrische Proportionallinie ED finden.

Auf=

Auflösung: Hänget AC und CB in eine gerade Linie AB zusammen, machet aus A einen beliebigen Winkel EAB, und traget auf dessen andern Schenkel AE die dritte gegebene Linie AD; ziehet alsdann DC zusammen, und aus B führet mit derselben eine Parallel BE, so ist AC: CB = AD: DE §. 128. und also DE die gesuchte vierte geometrische Proportionallinie.

Oder:

Wenn AB, AE und AC gegeben wären, so traget auf AB aus der Spitze A des Winkels die Linie AC; auf den andern Schenkel aber AE; ziehet EB, und mit dieser machet CD parallel, so wird AD die Proportional sein. §. 128.

Oder:

Wenn zu AB und BC die dritte Proportional gesuchet wird, so daß AB: BC = BC: DE; so hanget AB und BC in eine gerade Linie zusammen, machet auf den andern Schenkel AD = BC; ziehet BD und mit dieser EC parallel, so ist DE die verlangte Proportional §. 128. Fig. 84.

Durch die verschiedene Versetzung der gegebenen Linien können diese Aufgaben auch noch auf mehrere Art aufgelöset werden, wenn nur allezeit nach §. 128. und 129. die erforderliche Proportion dazwischen staat findet.

Aufgabe.

Fig. 85. §. 134. Eine kleine Linie AM in viele gleiche Teile zu teilen.

Auflösung: Es sei die Linie AM in neun gleiche Teile zu teilen. Da sich nun dieselbe nicht deutlich genug unterscheiden liessen, wenn man sie auf die Linie AM selbst tragen wolte, so ziehet aus A eine Linie AL von beliebiger Länge, und mit einem beliebigen Winkel. Traget auf dieselbe neun gleiche Teile wie Ab, bc, cd u. s. f. in beliebiger Grösse, und ziehet ML zusammen. Ferner führet durch die Punkten b, c, d u. s. f. Parallelen mit AM, so wird $1n = \frac{1}{9}$, $2h = \frac{2}{9}$, $3g = \frac{3}{9}$ und endlich $8b = \frac{8}{9}$ von AM sein §. 129.

Aufgabe.

Fig. 86. §. 135. Einen geometrischen Maasstab zu verfertigen.

Auflösung: Wenn eine Linie wie AB in sehr viele z. B. in tausend Teile zu teilen wäre, so beschreibet erstlich darauf das Rektangel ACDB, indem man AC = BD nach Belieben annimt; hernach teilet die Linie AB in zehn gleiche Teile, entweder durch Versuchen oder nach einer Art, die am bequemsten scheinet; errichtet aus diesen Teilungspunkten Perpendikularn bis an CD auf, so ist auch dieselbe in gleiche zehn Teile geteilet, und ein solcher Teil wie

AF,

AF oder BM, wird von den verlangten tausend Teilen hundert enthalten. Teilet ferners AC und BD in zehn gleiche Teile, und ziehet die Teilungspunkte auf AC, und BD mit Parallelen zu AB oder CD zusammen. Um nun einen Teil wie MB oder LD in zehn zu teilen, so ziehet nur die Diagonal LB, so ist ab $= \frac{1}{10}$, cd $= \frac{2}{10}$, ef $= \frac{3}{10}$ u. s. w. nach §. 134. und folglich die Linie MB, oder LD in zehn gleiche Teile geteilet. Nun haben wir zwar die gegebene Linie AB in hundert, oder vielmehr in die Zehener der Einheiten der Tausende geteilet, es ist aber noch erforderlich, daß man auch die Einheiten der Tausenden selbst bekomme, und in dieser Absicht ist noch nöhtig, einen solchen Teil wie ab, oder $\frac{1}{10}$ von MB noch einmal in zehn Teile auf folgende Art zu teilen: traget ab, cd, ef u. s. w. nacheinander auf die Linie AF und CO, ziehet aus den Teilungspunkt n nach F, aus r nach h, aus v nach o u. s. w. die schrähen Linien (**Transversalen**) so wird wiederum ig $= \frac{1}{10}$, sk $= \frac{2}{10}$, tz $= \frac{3}{10}$ u. s. w. §. 134. und folglich nO $=$ ab in zehn Teile geteilet werden. Da nun zehn ig $=$ nO, zehn nO $=$ CO, und zehn CO $=$ CD $=$ AB, so sind tausend ig $=$ AB oder der gegebenen Linie.

Wolte man von einen dergleichen Maasstabe mit dem Zirkel gewisse Teile, z. B. 430 abnehmen, so setzet bei 400 auf der Linie CD eine Spitze ein,

die

die andere aber eröfnet bis in v; oder setzet eine in m, und die andere in f ein. Wären aber bei den zunehmenden Teilen noch Einheiten vorhanden. Z. B. 237. so setzet eine Spitze bei der Perpendikular 200 in p, die andern aber in l ein; weil erstlich pq = 200, yl = 30, und qy = 7 ist.

Wiewohl wir hier eigentlich nur von der Einteilung der geraden Linien reden, so wollen wir doch auch die Einteilung des Umkreises eines Zirkels in seine 360 Grade hersetzen, weil sonst kein schicksamerer Ort dazu zu sein scheinet, und zwar:

Fig. 87. 1. Teilet den Umkreis des Zirkels durch die zween aufeinander perpendikular stehende Durchmesser AB und CD in vier gleiche Teile, deren ieder 90° sein wird.

2. Ziehet aus A, D, B und C mit dem Radius des Zirkels die Bögen PQ, LI, RS und MN, so wird der Bogen AP = 60° sein, weil AOP ein gleichseitiges Dreieck ist, und folglich ieder Winkel desselben 60° hat §. 98. und aus der nehmlichen Ursache ist auch AQ = LD = DI = SB = BR = NC = CM = 60°. Weil nun AC = 90°, und AP = 60° ist, so ist AC — AP = PC = 30°, und da auch MC = 60° ist, so ist auch AC — MC = AM = 30°. Ziehen wir dahero AM + PC, d. i. 30° + 30° von AC = 90° ab, so verbleibt MP = 30°. Das nehmliche ist von den andern Dreivierteln des Zirkels zu verstehen, und wir sehen daraus, daß der ganze Umkreis durch die gezogene Bögen in zwölf gleiche Teile, d. i. von 30° zu 30° eingeteilet werde.

3. Teilet nun ieden solchen Bogen wie AM, MP u. s. w. durch Versuchen in drei gleiche Teile, so wird der Umkreis von 10° zu 10° geteilet sein.

4.

4. Ferner wird iedes Drittel von AM, MP u. s. w. in zween Teile geteilet, so hat man die Grade von 5 zu 5.

5. Und endlich teilet man diese abermal durch Versuchen in fünf gleiche Teile, oder in einzelne Grade ein.

Man könte auch AM oder PM zuvor in zween, dann iede Hälfte in 3, und $\frac{1}{3}$ von der Hälfte in fünf einteilen, welches auf eines hinaus komt.

Ausser dieser algemeinen Art der Einteilung der Grade eines Zirkels, ist nun insbesondere von der Teilung sowohl durch Hülfe der Transversalen, als auch durch den sogenanten Nonius noch folgendes zu bemerken.

Nicht selten geschiehet es, daß man sonderlich bei genauern mathematischen Werkzeugen den Grad noch in kleinere Teile, z. B. in Drittel, Viertel, Sechstel, oder auch wohl in Sechzigtel oder Minuten einteilen mus. Da aber diese enge Einteilung nur mit unsäglicher Mühe, und doch niemals mit der erforderlichen Genauigkeit geschehen könte, so haben sich einige des Vorteils der Transversalen wie wir bei geraden Linien §. 135. getahn haben, bedienen wollen; und zwar zogen sie zu dem einzuteilenden Bogen, wovon wir AE als einen Grad der in vier Teile geteilet werden sol, annehmen wollen, so viele parallele Bögen mc, nb, oa, CF in gleicher Weite voneinander, als der Grad Teile bekommen solte, und durch diese führten sie die Diagonal AF, die auf den Bögen die verlangte Teile abschneiden, d. i. daß alhier da = $\frac{1}{4}$, eb = $\frac{2}{4}$, und fc = $\frac{3}{4}$ werden solte. Fig. 88.

Damit aber die Anfänger, wenn ihnen etwan nach dieser Art eingeteilte Instrumente vor die Hand kom-

kommen, nicht in die Irre geführet werden mögen, so wollen wir die Unrichtigkeit davon ein wenig auseinander setzen.

Wir können erstlich die Bögen da, eb, fc und AE, nicht minder mf, ne, od und CF, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, als gerade Linien ansehen, und nach §. 134. schliessen, daß da $= \frac{1}{4}$, eb $= \frac{2}{4}$, fc $= \frac{3}{4}$ von AE, und aus dem nehmlichen Grunde mf $= \frac{1}{4}$, ne $= \frac{2}{4}$, od $= \frac{3}{4}$ von CF sei. Da aber AC und EF als zween Radien nicht parallel sind, folglich CF nicht gleich AE sein kan, so kan auch ne oder $\frac{2}{4}$ von CF nicht gleich eb oder $\frac{2}{4}$ von AE sein, und folglich ist der Punkt e, in welchen die Transversal AF den Bogen nb durchschneidet, nicht der halbe Grad von nb, und aus der nehmlichen Ursache ist ad nicht $\frac{1}{4}$ von ao, und cf nicht $\frac{3}{4}$ von cm; also ist die Einteilung mit Transversalen wenigstens in so weit unrichtig, als die Bögen mc, nb u. s. w. gleich voneinander abstehen, oder die Transversal eine gerade Linie ist.

Diese Art einen Zirkel einzuteilen kan aber richtig geschehen, wenn man entweder die Entfernungen Hr, ri, ih, hG der Bögen von ungleicher Grösse machet, und die Transversal BG ziehet, oder wenn man dieselbe gleich läst, aber die Transversal ED als eine krumme Linie vorstellet. Da aber beide Arten mit gehöriger Genauigkeit in die Ausübung zu bringen sehr schwer, ia fast untuhnlich ist, so übergehen wir dieselbe mit Stilschweigen, verweisen aber die Anfänger um weitere Nachricht davon auf Bions mathemat. Werkschule.

Was die sogenante Nonische Einteilung anbetrift, so haben wir einem Portugesischen Mathema-

matiker mit Nahmen Nonius, oder in seiner Sprache Nunez eine schöne, und nützliche Erfindung zu danken, welche bei mathematischen Instrumenten an denen eine gerade Linie, oder ein Zirkelbogen schon in gewisse Hauptteile eingeteilet ist, die aber noch kleinere Abteilungen haben, sehr leicht und richtig in die Ausübung zu bringen ist. Sie bestehet in folgenden:

Es sei ein gerader Maasstab CD, der durchaus in Zolle oder in andere Hauptteile eingeteilet ist, in noch kleinere Teile nehmlich in Linien abzuteilen. Zu diesem Ende nehmet einen andern Maasstab AB, und gebet ihm eben so viele Haupteile mehr oder weniger einen, zur Länge, als ein solcher Hauptteil kleinere Teile bekommen sol. Da wir nun in dem gegenwärtigen Fal den Zol in zwölf Linien zu teilen uns vorgenommen haben, so mus AB 13 oder 11 Zol lang sein; diese Länge aber wird in eben so viele nehmlich in zwölf Teile geteilet, als ein Zol oder Hauptteil bekommen sol. Im ersten Fal, nehmlich wenn AB 13 Zol lang gemacht worden, wird ieder Teil um eine Linie grösser, und im andern Fal, wenn AB nur eilf Zol ist, um eine Linie kleiner als ein Hauptteil von CD sein. Leget man nun beide Maasstäbe aneinander, so daß A und C zusammen treffen, so wird ausser A und B kein Teilungspunkt von AB mit einem von CD übereinstimmen, sondern 1 von AB wird um $\frac{1}{12}$ über 12 von CD, 2 von AB um $\frac{2}{12}$ über 11 von CD, und 11 von AB um $\frac{11}{12}$ über 2 von CD hinaus stehen, und verrücket man AB so weit, daß 1 von AB mit 12 von CD übereins komt, so ist B um eine Linie über 13 von CD gerücket; kommet 2 von AB mit 11 Fig. 89.

von

von CD überein, so ist B zwo Linien über 13 von CD zu stehen gekommen, und trift nach geschehener Vorrückung 11 von AB mit 2 von CD ein, so ist B 11 Linien über 13 von CD gekommen. Um also überhaupt zu wissen, um wieviel der Punkt B über einen nächsten Teilungspunkt von CD hinaus stehet, so hat man auf AB, wenn AB 13 Zol lang, von B aus, im Fal es aber nur 11 Zol lang genommen worden, von A aus, so lange zu zählen, bis man auf einen Teilungspunkt komt, der mit einem von CD übereinstimmet, und eben so viele Linien, oder was immer für Teile, wird B oder A über einen der nächsten Teilungspunkten von CD stehen, welches eben den Vorteil bringet, als wenn ieder Zol von CD würklich in Linien geteilet wäre.

Was wir hier von der geraden Linie gesaget haben, lässet sich nicht weniger zur Einteilung eines Gradbogens CD anwenden. Denn wäre derselbe z. B. in seine einzelne Grade geteilet, und man verlangte noch Sechstel von Graden oder die Minuten von 10 zu 10 zu unterscheiden, so machet einen Bogen AB, der an das bewegliche Lineal AO fest ist, und sich mit demselben bewegen lässet, 6° mehr einen, d. i. 7° lang; teilet diese Länge in 6 Teile, so ist ieder solcher Teil um $\frac{1}{6}$ oder um 10 Minuten grösser als ein Grad des Bogens CD, wodurch bei der Verrückung des Bogens AB alles dasienige, so wir bei der geraden Linie gesagt haben, geschiehet. Wil man nun wissen, wieviel Minuten der Punkt A über 12° noch hinaus stehet, so zähle man auf AB so viele Teile nach, bis man auf einen komt, der mit einem auf dem Gradbogen CD, wie hier bei 50 und 7 geschie-

Fig. 90.

schiehet, übereins trift, so werden die abgezählte Teile auf AB die Minuten anzeigen, um welche der Punkt A noch über 12° hinaus stehet, und also wird der Bogen AB = 12° 50′ sein, ohngeachtet die wirkliche Einteilung desselben nur in einzelnen Graden ist.

Wäre der Gradbogen in halbe, drittel, oder viertel Grade eingeteilet, und man verlangte, daß der Nonius Minuten zeigen solte, so hätte man den Bogen AB so viele halbe, drittel, oder viertel Grade mehr oder weniger einen zu machen als ein halber, drittel, oder viertel Grad Minuten in sich hält, und denn denselben in so viel Teile zu teilen, als ein halber, drittel oder viertel Grad Minuten hat.





Dritter Abschnit.

Von den Flächen.

Erstes Hauptstück.

Von der Aehnlichkeit der geradlinigten Flächen.

Erklärung.

§. 136.

Flächen, in welchen alle Merkmale und Unterscheidungszeichen, ausser etwan die Grösse allein, zugleich anzutreffen sind, oder welche nicht anders, als etwan durch die Grösse allein voneinander unterschieden werden können, sind einander ähnlich §. 11. Nun können Flächen, wenn die Grösse bei Seite gesetzt wird, durch nichts voneinander unterschieden werden, als 1. durch die Ebene oder Krümme derselben §. 9. 2. Durch die Beschaffenheit der einschliessenden Linien, ob sie nehmlich gerade oder krum sind §. 10. 3. Durch

Durch die Anzahl der Seiten wovon sie eingeschlossen werden §. 88. 4. Durch die Neigung dieser Seiten zu einander, folglich durch die Grösse der Winkel §. 18. und endlich 5. durch die Verhältnis, so diese Seiten selbst gegeneinander haben. Folglich müssen in ähnlichen Flächen alle diese Merkmale einerlei, und übereinstimmig sein, und so bald nur eine davon bei zwoen Flächen nicht in der einen wie in der andern vorhanden ist, so sind sie allezeit unähnlich. Insbesondere können nur ebene den ebenen, geradlinigte den geradlinigten, so wie auch unebene nur den unebenen, und krumlinigte den krumlinigten ähnlich sein, bei welchen letztern nachmals noch die iedesmalige Eigenschaften der krummen Linien in weitere Betrachtung gezogen werden müssen.

Zusatz.

§. 137. Wenn demnach zwo ebene geradlinigte Flächen einander ähnlich sein sollen, so müssen sie 1. von einer gleichen Anzahl Seiten eingeschlossen sein. 2. Die Winkel an diesen Seiten, oder die Polygonswinkel müssen einander gleich sein; und 3. die gleichnahmigte Seiten müssen in beiden Flächen in einerlei Verhältnis zu einander stehen, oder proportional sein; und wenn diese drei Merkmale in verschiedenen Flächen dieser Art übereintreffen, so sind sie einander ähnlich.

Zusatz.

§. 138. Da in einem gleichseitigen Dreiecke nicht nur die drei Winkel untereinander, sondern auch den drei Winkeln eines ieden andern gleichseitigen Dreieckes gleich sind, §. 98. ferner auch die drei Seiten ebenfals untereinander gleich sind, §. 31. folglich zu einander einerlei Verhältnis haben, so sind alle gleichseitige Dreiecke einander ähnlich §. 137. auf eben diese Art müssen auch alle Quadrate, alle regelmässige Fünfecke, alle Sechsecke, und überhaupt alle regelmässige Vielecke von einer Art, d. i. welche einerlei Anzahl Seiten haben, durchgängig untereinander ähnlich sein.

Lehrsatz.

Fig. 91. §. 139. Wenn in zwei Dreiecken ABC und abc die drei Winkel des einen den drei Winkeln des andern gleich sind, so stehen auch die gleichnahmigte Seiten in Proportion, und die Dreiecke sind einander ähnlich.

Beweis. Man lege das Dreieck abc dergestalt auf ABC, daß der Punkt b auf B, und die Seite ab auf AB falle, so wird der Winkel b den Winkel B decken, folglich auch die Seite bc auf BC fallen §. 19. Da nun auch der Winkel $a = A$, und $c = C$, so lauft ac mit AC parallel §. 55; folglich stehen die gleichnahmigte Seiten in Proportion, d. i. AB:

ab

ab = BC: bc = AC: ac. §. 128. 129. daher sind die Dreiecke einander ähnlich §. 137.

Zusatz.

§. 140. 1. Wenn in zweien Dreiecken zween Winkel gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern gleich §. 93; folglich, so bald nur in zweien Dreiecken zween Winkel gleich sind, so sind sie einander ähnlich, und die gleichnahmigte Seiten proportional;

2. Wenn in einem Dreiecke eine Linie parallel mit einer Seite desselben gezogen wird, so entstehen dadurch zwei Dreiecke, die einander ähnlich, und deren gleichnahmigte Seiten proportional sind.

3. Haben zwei Dreiecke ihre Seiten parallel, so sind ihre Winkel gleich §. 54. folglich stehen auch die gleichnahmigte Seiten in Proportion, und die Dreiecke sind einander ähnlich.

Lehrsatz.

§. 141. Wenn in zweien Dreiecken ABC, und abc alle drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern in Proportion stehen, so sind auch die gleichnahmigte Winkel einander gleich, und die Dreiecke sind einander ähnlich. Fig. 92.

Beweis. Man trage die Linie ab auf AB von B in D, und ziehe DE mit AC parallel; so ist vermöge der Voraussetzung AB : BC ab : bc. Nun ist aber auch AB : BC = BD : BE §. 128. folglich ist auch ab : bc = BD : BE. Weil nun BD = ab, so ist ab : bc = ab : BE. Daher ist BE = bc §. 205. Rechenk. auf eben diese Art ist nun ferners AB : AC = DB : DE §. 128. und AB : AC = ab : ac. Folglich ab : ac = DB : DE. Da nun wiederum BD = ab, so ist ab : ac = ab : DE, und DE = ac §. 205. Rechenk. folglich ist das Dreieck DBE ≌ abc, und die Winkel D = a, B = b, E = c §. 35. Weil nun D = A und E = C §. 54, so sind auch die Winkel A = a, B = b, und C = c, folglich ist das Dreieck ABC ∽ abc §. 137.

Lehrsatz.

§. 142. Wenn in zweien Dreiecken ABC und abc zwo Seiten des einen AB und BC, mit zwo Seiten des andern ab und bc in Proportion stehen, und die dazwischen eingeschlossene Winkel B und b einander gleich sind, so sind es auch die übrige gleichnahmigte Winkel, und die Dreiecke sind einander ähnlich.

Beweis. Man lege das Dreieck abc dergestalt auf ABC, daß der Winkel b auf B zu liegen komme, so wird er denselben decken, und der

der Schenkel ab wird auf AB, und der Schenkel bc auf BC fallen. Nun mache man BD = ab, und ziehe durch den Punkt D die Linie DE parallel mit AC, so ist AB: BC = BD: BE §. 128. Da nun aber auch AB: BC = ab: bc, so ist ab: bc = BD: BE, nun ist BD = ab; folglich ist auch ab: bc = ab: BE, daher ist BE = bc §. 205. Rechenk. und das Dreieck ABC ≌ abc §. 33. folglich der Winkel BED = c, und BDE = a. Nun ist aber auch der Winkel BDE = A, und BED = C §. 54. folglich ist auch A = a und B = b, folglich ist das Dreieck ABC ∽ abc §. 139.

Diese drei Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke, stehen in der genauesten Verbindung und Uebereinstimmung mit den drei ersten Lehrsätzen, die wir bei der Gleichheit der Dreiecke zum Grunde geleget haben §. 33. 34. und 35. und dienen einander gegenseitig zur Erläuterung. Durch diese wird die gänzliche Uebereinstimmung der Dreiecke, d. i. ihre Gleichheit, und Aehnlichkeit zugleich, durch jene aber nur ihre Aehnlichkeit allein bestimmet. Die Gleichheit der Winkel wird bei den einen wie bei den andern erfordert; in Absicht auf die Seiten aber ist bei den erstern ihre Gleichheit, bei den leztern oder bei der Aehnlichkeit blos die Proportion derselben nohtwendig. Daher mus §. 139. mit §. 34. ferner §. 141. mit §. 35. und §. 142. mit §. 33. verglichen werden.

Zusatz.

§. 143. In einem gleichschenklichten Dreiecke werden durch einen Winkel auch die beiden übrige bestimmet §. 100: folglich so bald zwei gleichschenklichte Dreiecke einen gleichen Winkel haben, so sind alle drei Winkel einander gleich, die Dreiecke selbst einander ähnlich, und die gleichnahmigte Seiten proportional §. 139.

Lehrsatz.

§. 144. Alle gleichnahmigte Linien, die immer in zwei ähnlichen Polygons gezogen werden können, sind einander proportional, und die Dreiecke, in die sie dadurch zerteilet werden, einander ähnlich.

Fig. 93. Beweis. In dem Dreieck BAC und bac ist AB: BC = ab: bc, und der Winkel ABC = abc §. 137; folglich sind die Dreiecke einander ähnlich §. 142. der Winkel BCA = bca, und BC: AC = bc: ac, ferner da der Winkel BCD = bcd, und BCA = bca, so ist auch der Winkel ACD = acd; da nun auch BC: CD = bc: cd, und BC: AC = bc: ac, so ist auch AC: CD = ac: cd, folglich ist das Dreieck ACD ≌ acd, §. 142. auf eben die Art wird nun auch erwiesen, das Dreieck ADE ∽ ade deswegen sind in beiden Polygons die Dreiecke einander ähnlich, und die gleichnahmigte Linien einander proportional.

Auf

Auf eben diese Art kan auch umgekehrt erwiesen werden, daß wenn die Dreiecke, worin zwei Polygons zerteilet worden, einander ähnlich sind, und proportionale Seiten haben, auch die Polygons selbsten einander ähnlich sein müssen.

Aufgabe.

§. 145. Zu einem gegebenen Polygon ein anderes ähnliches, dessen eine Seite gegeben ist, zu beschreiben.

Auflösung. Es sei ABCDE das gegebene Polygon, wozu auf der gegebenen Seite ae, nach der Verhältnis von AE: ae, ein ähnliches abcde beschrieben werden sol. Demnach

1. Zerteilet das gegebene Polygon durch beliebige Diagonalen in lauter Dreiecke.

2. Hierauf suchet zu AE, ae, und einer ieden Linie des gegebenen Polygons, oder einer ieden Seite der Dreiecke, in welche es zerteilet worden, eine vierte Proportionallinie, um daraus ähnliche Dreiecke beschreiben zu können, füglich auf folgende Art.

3. Ziehet eine unbestimte Linie mo, und beschreibet aus m mit der Linie AE, als einem Halbmesser den Bogen on von unbestimter Länge; durchschneidet denselben mit einer Sehne die der gegebenen Linie ae gleich ist in n, und ziehet die Linie mn ebenfals unbestimt.

4. Traget AD aus m in q, und ED aus m in g, und ziehet hierauf mit on die Paral-

 le-

lelen qp und gx, so werden solche den Linien AD und ED proportional sein, §. 140. N. 2. oder auch: ziehet mit AD und ED aus m die Bögen qp und gx, so sind die Sehnen davon die gesuchte Proportionallinien §. 143.

5. Beschreibet auf ae mit den Seiten qp und gx das Dreieck ade, so wird solches dem Dreieck ADE ähnlich §. 141.

6. Auf eben diese Art suchet zu den zwo Seiten AC und CD des Dreiecks ACD die Proportionalen ft und ir, und beschreibet damit das ähnliche Dreieck acd.

7. Wiederholet dieses Verfahren so vielmal, als Dreiecke in dem gegebenen Polygon vorhanden sind, so wird das gefundene abcde demselben ähnlich sein §. 144.

Hierin bestehet nun eigentlich die Vergrösserung, oder die Verkleinerung der Figuren nach einer gewissen Verhältnis ihrer gleichnahmigten Linien, und der Winkel nmo wird insbesondere der Reduktionswinkel genennet. Doch können wir alhier nicht unbemerkt lassen, daß zwar das Verkleinern der Figuren in der Ausübung ganz wohl von statten gehe, bei dem Vergrössern derselben aber sich allezeit vielmehr Unrichtigkeit einschleicht, weil sich alle Fehler, die im kleinen noch unsichtbar waren, vergrössern, und öfters sehr sichtbar werden.

Eine andere sehr gebräuchliche Art Figuren zu verkleinern, oder zu vergrössern ist folgende: man teilet eine Linie CD eines zum Vergrössern, oder
Fig. 94. zum Verkleinern gegebenen Polygons CEFGD in

eine

eine beliebige Anzahl gleicher Teile ein; oder man nimt einen wirklichen Maasstab AB, durch welchen die Figur ausgemessen wird, dazu an. Denn teilet man auch die gegebene Linie cd, worauf die vergrösserte oder verkleinerte Figur beschrieben werden sol, in die nehmliche Anzahl Teile, oder man nimt dazu ebenfals einen sogenanten veriüngten Maasstab ab an, welcher zu dem vorigen AB eben dieienige Verhältnis hat, in welcher die Seite cd des neuen Polygons zu der Seite CD des gegebenen stehet, und messet sowohl CG als DG auf dem Maasstabe AB. Eben diese Maasse nehmet auch von dem Maasstabe ab, und beschreibet damit das Dreieck cgd, dessen Seiten den Seiten des Dreiecks CGD proportional sein werden. Eben so verfahret auch mit den übrigen Dreiecken, bis die ganze Figur erhalten wird, deren Seiten mit den gleichnahmigten Seiten der gegebenen Figur in eben der Verhältnis stehen werden, wie die Maasstäbe ab: AB, oder auch wie die Seiten cd: CD.

Auf diesem Grunde beruhet die Verfertigung aller mathematischen Zeichnungen und Modellen, nach einem sogenanten veriüngten Maasstabe.

Lehrsatz.

§. 146. Die Umkreise ähnlicher Figuren verhalten sich gegeneinander, wie ihre gleichnahmigte Seiten.

Beweis: Weil in ähnlichen Figuren die gleichnahmigte Seiten proportional sind §. 137. so ist cd: CD = ce: CE = ef: EF = fg: Fig. 94.

fg : FG = gd : GD ; nun verhält sich bei mehrern gleichen Verhältnissen die Summe aller vordern Glieder, zur Summe aller hintern, wie iedes vordere Glied zu seinem hintern, §. 214. Rechenk. folglich ist cd + ce + ef + fg + gd : CD + CE + EF + GD = cd : CD. Das erste Verhältnis aber bestehet aus den Umkreisen der zwo ähnlichen Figuren, und das andere aus ihren gleichnahmigten Seiten; folglich verhalten sich die Umkreise ähnlicher Figuren zu einander, wie ihre gleichnahmigte Seiten.

Zusatz.

Fig. 95. §. 147. Die Umkreise zweier ähnlichen Polygonen, die in einen Zirkel beschrieben sind, müssen sich also wie die Radien beider Zirkel verhalten. Denn weil ED : ed = EO : eO; §. 137. so ist auch ED + DC + CB + BA + AG + GF + FE : ed + dc + cb + ba + ag + gf + fe = EO : eO. §. 146.

Zusatz.

§. 148. Siehet man einen Zirkel als ein Polygon von unendlich vielen Seiten an, so kan man nach vorigem Lehrsatz auch sagen, daß alle Zirkel einander ähnlich sind, und daß sich ihre Umkreise gegeneinander, wie ihre Radien, Durchmesser, oder wie die Sehnen gleicher Bögen, verhalten.

Zu-

Zusatz.

§. 149. Da alle Zirkel einander ähnlich sind, so würde man leicht den Umkreis von einem ieden Zirkel, dessen Durchmesser gegeben wäre, finden können, und umgekehrt, aus dem gegebenen Umkreise den Durchmesser, wenn man nur von einem das wahre Verhältnis des Durchmessers zu seinem Umkreise wüste, indem man alsdenn nur eine vierte Proportional zu suchen hätte.

Viele Mathematiker haben das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise eines Zirkels schon seit langer Zeit mit unsäglicher Mühe gesuchet, und so viele Verhältnisse sie auch herausgebracht haben, so hat doch keine davon die vollkommene Richtigkeit. Doch ist bei einigen die Abweichung von der Wahrheit so geringe, daß man sich derselben in der Ausübung, ohne den geringsten Fehler zu besorgen, sicher bedienen kan. Wir können uns daher dieser alten mathematischen Streitfrage um so sicherer entschlagen, und die Zeit auf etwas nützlichers verwenden, als selbsten die richtige Auflösung derselben vielleicht von einem unbequemen Gebrauche sein würde, wenn sie auch erfunden wäre. Unter den bekanten Verhältnissen des Durchmessers zum Umkreise verdienen gemerket zu werden 1. die Verhältnis des Archimedes, wie 7 : 22, welche bei Gegenständen, wo keine grosse Schärfe verlanget wird, vielfältig im Gebrauche ist. 2. Des Adrianus Metius, 113 : 355, die weit schärfer, aber auch zum Gebrauche unbequemer ist, und 3. des

Lu-

Ludolph von Ceulen, wie 1 : 3, 14159265358979323846264338327950.... Von allen diesen Ziffern nimt man in den gewöhnlichsten Fällen nur die ersten drei, und setzet die Verhältnis, wie 100 : 314; wird eine grössere Schärfe verlangt, so vermehret man die Ziffern, und setzet, 1000 : 3141; oder 10000 : 31415, u. s. w. wodurch man sich endlich der genauesten mathematischen Richtigkeit nach Verlangen so weit nähern kan, daß auch in den weitläuftigsten Rechnungen nicht die geringste Abweichung mehr merklich sein wird.

Lehrsatz.

Fig. 96. 150. Wenn sich zwo Sehnen AB, und CD in einem Zirkel in was immer für einen Punkt E durschneiden, so stehen ihre Segmente DE, AE, EB und EC in Proportion.

Beweis: Ziehet die Linien DB und AC, und betrachtet daß der Winkel AEC = DEB §. 24. N. 2. nicht minder, daß der Winkel BDC = BAC, und DBE = DCA §. 78. da also die zwei Dreiecke DEB, und ACE gleiche Winkel haben, so sind sie einander ähnlich, §. 139. und dahero stehen ihre Seiten, die zugleich die Segmente der Sehnen sind, in Proportion, d. i. DE : AE = EB : EC.

Zusatz.

Fig. 97. §. 151. Wenn also eine Sehne AB durch den Mittelpunkt F gehet, oder ein Durchmesser

ser ist, die andere DC aber denselben in irgend einem Punkte E perpendikular durchschneidet, so stehen die Segmente nach vorigem Lehrsatze in Proportion, d. i. AE : DE = EC : EB. Weil aber die Sehne DC durch den Durchmesser in E in zween gleiche Teile geteilet wird §. 59. oder DE = EC ist, so kan man setzen AE : DE = DE : EB, und folglich ist DE die mitlere Proportional zwischen den Segmenten des Durchmessers. Wenn man also zwo gegebene Linien AE, und EB in eine zusammen hänget, sie in zween gleiche Teile AF, FB teilet, mit einem Radius FA einen halben Zirkel beschreibet, und aus E eine Perpendikular bis an Umkreis aufrichtet, so hat man an ED die mitlere Proportional zwischen den gegebenen AE, und EB gefunden.

Zusatz.

§. 152. Da ADB allezeit ein rechtwinkliches Dreieck ist, §. 80. so wird die Linie DE die man aus der Spitze des rechten Winkels perpendikular auf die Hypothenuse AB fallen läst, allezeit die mitlere Proportional zwischen den Teilen AE und EB der Hypothenuse sein, und nicht nur das Dreieck ADE ∽ DBE, sondern, weil eben daher AE : AD = DE : DB, folglich AE : DE = AD : DB, so ist auch das Dreieck ABD den vorigen beiden ähnlich §. 142.

Zu-

Zusatz.

§. 153. Weil wir wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DEB, AED und ADB setzen können: BE: DB = DB: AB, so ist DB die mitlere Proportional zwischen BE und AB; und da wir aus der nehmlichen Ursache sagen können: AE: AD = AD: AB; so ist auch AD die mitlere Proportional zwischen AE und AB.

Lehrsatz.

Fig. 98. §. 154. Wenn aus einem beliebigen Punkt A ausserhalb des Zirkels zwo gerade Linien, so den Kreis an zween Orten durchschneiden, oder zwo Sekanten AB und AC gezogen werden, so verhält sich AB: AC = AE: AF.

Beweis: Ziehet die Linien CF und BE, so ist in den zweien Dreiecken ABE, und ACF der Winkel FBE = FCE §. 78. und da sie den Winkel BAC gemein haben, so ist auch AFC = AEB, folglich sind die Dreiecke einander ähnlich, und ihre Seiten stehen in Proportion, d. i. AB: AC = AE: AF §. 139.

Zusatz.

§. 155. Ziehet man von A eine Tangente AD und von dem Berührungspunkte D zu den beiden Durchschnitspunkten der Sekante die Linien ED und DC; so ist in den zweien Dreiecken ADE und ADC der Winkel EDA,

der

der von der Sehne ED, und der Tangent AD eingeschlossen wird, dem Winkel ECD gleich §. 84. und da der Winkel A beiden Dreiecken gemein ist, so ist auch der dritte AED gleich dem dritten ADC; derowegen sind die Dreiecke einander ähnlich, und haben ihre Seiten proportional, d. i. AE : AD = AD : AC, §. 139. folglich ist die Tangent AD eine mitlere Proportional zwischen einer Sekant AC, und dem Teil AE derselben, der ausser dem Zirkel ist.

Aufgabe.

§. 156. Eine gegebene Linie AD in die äussere, und mitlere Verhältnis einzuteilen, so daß DB : AB = AB: AD. Fig. 99

Auflösung: Auf das Ende D der gegebenen Linie richtet eine Perpendikular DF = $\frac{1}{2}$ AD auf, und aus F beschreibet mit dem Halbmesser FD einen Zirkel; ferner ziehet von A durch den Mittelpunkt F eine Sekant AC, und machet AB = AE, so ist DB : AB = AB : AD.

Beweis: Da AD auf das Ende des Halbmessers DF perpendikular stehet, so ist sie ein Tangent, §. 67. und AC eine Sekant; derowegen ist AE : AD = AD: AC §. 155. folglich auch AD: AE = AC : AD, §. 213. Rechenk. ferner AD — AE : AE = AC —

AD : AD §. 214. Rechenk. Weil aber AE = AB, vermög der Auflösung der Aufgabe, so mus AD — AE = AD — AB = BD sein, und derowegen können wir anstaat der vorigen Proportion setzen BD : AB = AC — AD : AD, und da nach der Beschreibung der Figur der Radius FD = $\frac{1}{2}$ AD, so ist der Durchmesser EC = 2FD = AD, und dahero auch AC — AD = AC — EC = AE = AB. Setzen wir nun in der vorigen Proportion abermalen gleiches anstaat gleichen, d. i. AB anstaat AC — AD, so bekommen wir BD : AB = AB : AD, und folglich ist die Linie AD in die äussere und mitlere Verhältnis eingeteilet.

Lehrsatz.

Fig. 100. §. 157. Wenn man in einem gleichschenklichten Dreieck ABC, dessen Winkel A und C an der Grundlinie doppelt so gros sind, als der Winkel B, einen Winkel A durch die Linie AD in zween gleiche Teile teilet, so wird dadurch die entgegen stehende Seite BC in die äussere und mitlere Verhältnis geteilet, d. i. man kan sagen, das BC : BD = BD : DC.

Beweis: Die Dreiecke ABC und ADC, haben den Winkel BCA gemein, und nach der Bedingung ist der Winkel DAC = ABC, derowegen ist auch der dritte Winkel ADC = BAC §. 93. also sind beide Dreiecke einander ähn-

ähnlich §. 139. und auch das Dreieck ADC ist gleichschenklicht §. 99. Nicht minder kan man sagen, daß das Dreieck ADB gleichschenklicht sei, weil ebenfals nach der Bedingung der Winkel BAD $= \frac{1}{2}$ BAC und folglich = ABD ist, und daher ist AD = BD = AC §. 99. Nun aber ist vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecken BC : AC = AC : CD, setzen wir also anstaat AC seinen gleichen Werth BD, so bekommen wir BC : BD = BD : DC, und folglich haben wir erwiesen, daß BC durch die Linie AD in die äussere und mitlere Verhältnis geteilet werden.

Zusatz.

§. 158. Um also ein gleichschenklichtes Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so gros sei, als der an der Spitze, so mus man den Schenkel BC nach §. 156. in die äussere und mitlere Verhältnis teilen, und den grössern Teil BD zur Grundlinie AC nehmen; d. i. aus D, und C mit dem Radius BD Bögen ziehen, die sich in A durchschneiden, und denn AB und AC zusammen ziehen. Wäre aber nicht der Schenkel BC, sondern vielmehr die Grundlinie AC gegeben, worauf ein solches gleichschenklichtes Dreieck beschrieben werden sol, so teilet erst diese Linie AC in die mitlere und äussere Verhältnis, und beschreibet

daraus nach vorhergehender Art das gleichschenklichte Dreieck ACD. Verlängert alsdenn CD, und machet DB gleich AC, so bekomt ihr die Schenkel CB und AB.

Zusatz.

§. 159. Da die Winkel A und C an der Grundlinie einander gleich sind, und ieder doppelt so gros als B ist, d. i. $A = 2B$, und $C = 2B$, so ist $B + 2B + 2B = 5B = 180°$ §: 90. und $B = \frac{180°}{5} = 36°$. Da aber auch $\frac{360°}{10} = 36°$ dem Mittelpunktswinkel eines Zehnecks ist, so ist der Winkel, der in der Spitze eines gleichschenklichten Dreiecks, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so gros als der Winkel an der Spitze sind, allezeit der Mittelpunktswinkel, und AC die Seite eines regelmässigen Zehnecks. Hat man also nach §. 158. einmal ein solches Dreieck entworfen, so läst sich allezeit ein Zehneck auf geometrische Art beschreiben.

Zusatz.

Fig. 100. §. 160. Da in dem gleichschenklichten Dreiecke ABC der Winkel $B = \frac{180°}{5} = 36°$ oder der Mittelpunktswinkel eines Zehnecks ist, der

Mit-

Mittelpunktswinkel ADC eines Fünfecks aber Fig. 102.
$= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ und also das doppelte von
36° ist, so mus die Spitze B des vorigen Dreiecks ABC in einem Zirkel, in dem ein Fünfeck AFBEC beschrieben ist, und wovon AC eine Seite ausmachet, an dem Umkreise zu stehen kommen, weil der Mittelpunktswinkel ADC $= 72^\circ$, der Winkel ABC aber nur die Hälfte nehmlich $= 36^\circ$ ist, und nur die Winkel am Umkreise die Hälfte von den Winkeln am Mittelpunkt sind. §. 77.

Zusatz.

§. 161. Wenn auf einer in die mitlere Fig. 101. und äussere Verhältnis eingeteilten Linie AB, mit dem mitlern Gliede AC das gleichschenklichte Dreieck ADB errichtet wird, so hat ieder Winkel an der Grundlinie 36°, und der derselben gegen überstehende Winkel 108°. Denn, ziehet von der Spitze D bis zum Teilungspunkte C die Linie CD, so ist nach der Voraussetzung CB : AC $=$ AC : AB, und weil AC $=$ BD, so ist auch CB : BD $=$ BD : AB. Da nun der Winkel t den beiden Dreiecken DCB und ADB gemein ist, so sind sie einander ähnlich §. 142. folglich auch der Winkel S $=$ r; und da ferners auch t $=$ r §. 99. so ist s $+$ t $=$ 2r. Weil nun x der

 äus-

äussere Winkel des Dreiecks DCB, so ist $x = s + t = 2r$ §. 91. und da wegen des gleichschenklichten Dreiecks ADC, der Winkel $z = x$, §. 99. so ist auch $z = 2r$ folglich ist $r + x + z = r + 2r + 2r = 5r = 180°$ §. 90, und also $r = \frac{180}{5} = \overset{\circ}{36}$. Weil ferner $z + S = 2r + r = 3r$, so ist $z + s = 108°$, folglich der Polygonwinkel eines regelmässigen Fünfecks.

Zusatz.

Fig. 102. §. 162. Um demnach auf einer gegebenen Seite AC ein regelmässiges Fünfeck geometrisch zu beschreiben, so errichtet zuerst nach §. 158. das gleichschenklichte Dreieck ABC, dessen Seite AB durch die gegebene Linie AC in die mitlere und äussere Verhältnis geteilet wird. Hierauf beschreibet auf AC mit AC und AB die gleichschenklichte Dreiecke CAF und ACE, und ziehet endlich die Linien FB und BE, so ist das Fünfeck regelmässig. Denn der Winkel FAC = ACE ist der Polygonwinkel eines regelmässigen Fünfecks §. 161. Der Winkel BAC = 72° §. 158. 160. folglich ist FAB = $\overset{\circ}{36}$. Nun ist auch ACF = $\overset{\circ}{36}$. §. 161. also ist der Winkel FAB = ACF. Da nun FA = AC, und AB = FC, so sind die Dreiecke FAB und ACF einander gleich, §. 33.

§. 33. und der Winkel BFA = FAC. Eben dieses gilt auch von dem Winkel ACE, und die Seiten FB und BE sind gleich den Seiten FA und EC = AC. Endlich weil auch der Winkel FBA = AFC = 36°, und aus eben dem Grunde auch CBE = 36°, ferner ABC gleichfals 36° ist, §. 159. so ist der ganze Winkel FBE = 108°. Folglich sind alle Seiten und alle Winkel einander gleich, und daher ist das Fünfeck regelmässig §. 89.

Da die Proportion der gleichnahmigten Seiten ähnlicher Dreiecke, wenn wir von einem derselben drei, und von den andern eine Seite kennen, uns allezeit erlaubet, die übrige zu finden, so wollen wir den Anfängern zu gefallen in folgenden Aufgaben zeigen, wie man aus diesem Grunde durch Aussteckung ähnlicher Dreiecken den Abstand unzugänglicher Gegenstände finden könne. Mehrere dergleichen Auflösungen werden zur Uebung ihrem eigenen Nachdenken überlassen.

Aufgabe.

§. 163. Eine Entfernung DB, die nur an einem Ende D zugänglich ist, auf dem Felde zu finden. Fig. 103.

Auflösung: Errichtet aus D eine Perpendikular AD von beliebiger Länge, stellet in D und A Stäbe, und auch einen in C in gerader Linie mit AD, so daß AC etwan $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von AD werde. Richtet aus A noch eine Perpendikular AE rückwärts, und von unbestimter Länge auf, gehet alsdenn mit einem Stabe in die Verlängerung BC, und sehet, wo diese die Linie AE durchschneidet, wie hier in E; so wird das Dreieck EAC $\sim$ BDC, und wenn man AC, CD und AE messet, so kan man durch die Proportion AC : AE = CD : DB, die Linie DB leicht finden.

Oder:

Fig. 104. Verlängert DB bis in C, und lasset in beliebiger Weite und Richtung einen Punkt E ausstecken; messet alsdenn die Linie CE, und in ihrem Mittel A setzet einen Stab, wie auch einen in F, dergestalt, daß letzterer mit DE sowohl, als mit AB in gerader Linie stehe. Endlich messet DF und FE, und machet folgende Proportion: $FE - DE : \frac{DC}{2} = DF : DB$.

Beweis: Wenn DG = GE, so sind die zwei Dreiecke AGE und CDE einander ähnlich, und AG ist mit CD parallel §. 142. 55. Weil nun auch der Winkel DFB = GFA §. 24. N. 2. und DBF = FAG ist §. 54. so sind auch die Dreiecke AGF und FBD einander ähnlich, und ihre gleichnahmigte Seiten stehen in Proportion, §. 139. d. i. FG : GA = DF : DB,

aber

aber FG ist $= FE - DE$, und $GA = \frac{DC}{2}$, also ist $FE - DE : \frac{DC}{2} = DF : DB$.

Aufgabe.

§. 164. Die Länge einer an beiden Enden unzugänglichen Linie AH auf dem Felde zu bestimmen. Fig. 105.

Auflösung: Nachdem man die Linie AC sowohl, als CH nach der vorigen Aufgabe gefunden hat, so machet Cm etwan $\frac{1}{4}$ von AC, und Cn $\frac{1}{4}$ von CH lang, messet alsdenn noch mn, so ist Cm : mn = AC : AH §. 142.

Alle diese Messungsarten durch Absteckung ähnlicher Dreiecke haben den Fehler, daß sie sich nicht aller Orten anbringen lassen, weil man sowohl zur Aussteckung der Dreiecke, als zur Ausmessung ihrer Seiten einen schicklichen Platz haben mus.





Zweites Hauptstück.

Von der Gleichheit und der Ausmessung der Parallelogrammen und Dreiecken.

Erklärung.

§. 165.

Diejenige gerade Linie einer Fläche, so für ihre Länge angenommen wird, heist die **Grundlinie** (basis); die zwote Dimension derselben, oder ihre Breite, d. i. die Entfernung ihrer äussersten Gränze von der Grundlinie, ist alsdenn die **Höhe** derselben; welche demnach in der kürzesten folglich senkrechten Linie bestehet, so von dem entferntesten Punkte der Fläche auf die Grundlinie gezogen werden kan. §. 45.

Fig. 106. Wenn demnach in einem Parallelogram ABCD die Linie AB zur Grundlinie angenommen wird, so ist AC oder DB die Höhe davon, ferner wenn
Fig. 114. in ABED die Grundlinie AB ist, so ist die Perpendikular DC die Höhe derselben. Desgleichen nimt man in dem Dreiecke ABC die Linie BC zur Grundlinie an, so wird die Perpendikular, so
Fig. 113. von ihrer Spitze A auf die Grundlinie gefället wird, die Höhe desselben.

Da

Da es nun an sich willkührlich ist, welche Linie zur Grundlinie erwählet werde, so verändert sich auch die iedesmalige Höhe in Absicht auf dieselbe. Wäre daher z. B. in dem Parallelogram ABED, die Grundlinie AD, so wird BF die Höhe; so wie auch in dem Dreiecke ABC, die Linie CE die Höhe wird, wenn AB zur Grundlinie erwählet worden. Es hänget demnach blos von den iedesmaligen Umständen und von der Bequemlichkeit ab, von welcher Seite die Flächen zu betrachten sind.

Fig. 114.
Fig. 113.

Zusatz.

§. 166. Da die Höhe eines Dreiecks auf die Grundlinie perpendikular ist, und bis an die Spitze des ihr entgegen stehenden Winkels reichet §. 165. so mus bei einem rechtwinklichtem Dreiecke ABC, wenn ein Cathete CB zur Grundlinie angenommen wird, der andere AB die Höhe sein, und an das Ende der Grundlinie fallen; ist aber das Dreieck spitzwinklicht, oder wird die Linie, so die Höhe anzeiget, aus dem rechten oder stumpfen Winkel selbst auf die gegenüber stehende Seite oder Grundlinie perpendikular gezogen, so fält sie wie in ABC zwischen die zween Endpunkte der Grundlinie AC. Wäre aber das Dreieck stumpfwinklicht, wie BAC, und würde die Höhe aus einem spitzigen Winkel B perpendikular auf die Grundlinie AC genommen, so fält sie ausser derselben auf ihre Verlängerung in D.

Fig. 117.
Fig. 119.
Fig. 120.

Er=

Erklärung.

§. 167. Da eine Fläche nicht anders als durch eine andere Fläche ausgemessen werden kan, §. 5. so hat man zum Maasstabe derselben ein Quadrat erwählet, dessen Seite nach Verschiedenheit des Längenmaasses §. 38. bald eine Klafter, bald ein Schuh, bald ein Zol u. s. w. ist, und daher **Quadratklafter, Quadratschuh, Quadratzol** u. s. w. genennet wird, deswegen heisset auch das Flächenmaas das **Quadratmaas**. **Eine Fläche ausmessen** ist daher nichts anders, als bestimmen, wie oft ein solches zur Einheit angenommenes Quadrat in derselben enthalten ist.

Weil das Längenmaas nach den §. 38. angeführten Betrachtungen sehr verschieden und veränderlich ist, und das Quadratmaas daraus entspringet, so mus auch das leztere aus eben dem Grunde diesen Veränderungen unterworfen sein; daher denn auch eben dergleichen Reduktionen dabei nöhtig werden. Was die besondere Einteilung dieses Quadratmaasses sowohl nach dem zehnteiligen als zwölfteiligem Maas anbetrift, und wie bei der würklichen Anwendung desselben zu verfahren, wird in dem fünften Hauptstück ausführlich gezeiget werden.

Lehrsaz.

Fig.106. §. 168. Der Flächen Inhalt eines Rektangels ABCD ist gleich dem Produkt aus der Grundlinie AB in die Höhe AC.

Be-

Beweis: Wenn man annimt, daß die Grundlinie AB in 6, und ihre Höhe AC in vier Klafter, Schuh u. s. w. geteilet sei, und daß aus den Teilungspunkten derselben mit AC, und AB Parallelen geführet wären, so wird die ganze Fläche ABCD dadurch in so viele Reihen kleiner Quadraten eingeteilet, als die Höhe AC Teile hat, und iede Reihe hat so viele Quadrate als die Grundlinie AB Teile enthält, d. i. in dem gegenwärtigen Falle sind vier Reihen vorhanden, deren iede sechs Quadrate hat. Um also die Anzahl dieser Quadraten zu bekommen, so mus man nach §. 39. Rechenkunst, die in einer Reihe befindliche durch die Anzahl der Reihen, das ist, 6 durch 4 multipliciren; die Anzahl der Quadraten in einer Reihe ist aber gleich der Anzahl der Teile so die Länge AB ausdrücken, und die Anzahl der Reihen ist gleich der Anzahl der Teile so die Höhe AC enthält; also ist das Produkt aus der Grundlinie AB, und der Höhe AC gleich dem Flächen Inhalte des Rektangels ABCD.

Zusatz.

§. 169. Da bei einem Quadrat die Grundlinie und Höhe gleich sind §. 104. so ist der Flächen Inhalt eines Quadrats gleich dem Produkte einer Seite desselben durch sich selbst multiplicirt. Fig. 104.

Lehr-

Lehrsatz.

Fig.107. §. 170. Zwei Parallelogramme ABCD, und EFCD die auf der nehmlichen Grundlinie CD, und zwischen zwo Parallelen AF, und CD stehen, oder einerlei Höhe AC haben, sind einander an Flächen Inhalte gleich.

Beweis: Weil in Parallelogrammen die gegen überstehende Seiten gleich sind, §. 108. so ist AC=BD, EC=DF, und EF=CD =AB. Daher ist auch AE=BF; derowegen sind die Dreiecke ACE, und BDF einander gleich §. 35. Ziehen wir nun von beiden das Dreieck BOE, so ihnen gemein ist, ab, so ist ABOC=OEFD; und setzen wir hingegen das Dreieck COD zu beiden hinzu, so ist auch ABCD=EFCD, dieses sind aber zwei Parallelogramme die auf der nehmlichen Grundlinie CD, und zwischen zwo Parallelen AF, und CD stehen, oder einerlei Höhe AC haben; also sind dieselben an Inhalte einander gleich.

Zusatz.

§. 171. Stehen die Parallelogramme nicht auf der nehmlichen, sondern auf gleichen Grundlinien, und haben gleiche Höhen, wie Fig.108. ABCD und EFGH, so läst sich dennoch, wenn man sie mit den Linien CE, und DF zusammen hänget, das nehmliche von ihnen behaupten, was wir §. 171. erwiesen haben; denn als-

denn

denn ist ABCD = EFCD §. 170. und wenn man EF als eine Grundlinie ansiehet, so ist aus eben der Ursach auch EFCD = EFGH, und also auch ABCD = EFGH.

Zusatz.

§. 172. Da der Inhalt eines Rektangels ABCD gleich dem Produkt aus der Grundlinie CD, und der Höhe AC ist, §. 168. und ein schief stehendes EFGH, welches gleiche Grundlinie, und Höhe mit dem Rektangel hat, demselben an Inhalt gleich ist §. 171. so ist auch der Flächen Inhalt eines ieden noch so schief stehenden Parallelograms gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe. Fig. 107. 108.

Zusatz.

§. 173. Da der Flächen Inhalt der Parallelogrammen dem Produkte aus ihrer Grundlinie, in die Höhe gleich ist, §. 172. so müssen sich die Inhalte derselben wie diese Produkte verhalten, d. i. wenn der Inhalt des einen gleich m, seine Grundlinie = a, und die Höhe = b; und der Inhalt des andern = n, seine Grundlinie = c, und die Höhe = d ist, so ist m : n = ab : cd. Derowegen stehen die Inhalte zweier Parallelogrammen in einer zusammengesetzten Verhältnis ihrer Grundlinien und Höhen. Ist nun m = n, Fig. 109.

so

so ist auch $ab=cd$, und also kan man nach §. 212. Rechenk. setzen $a:c=d:b$. D. i. in zwei gleichen Parallelogrammen verhalten sich die Grundlinien gegeneinander, wie umgekehrt ihre Höhen. §. 219. Rechenk. oder: die Grundlinie des ersten verhält sich zur Grundlinie des andern, wie umgekehrt, die Höhe des andern zur Höhe des ersten.

Zusatz.

Fig. 110. §. 174. Wenn also zwei Parallelogrammen m und n gleiche Grundlinie a haben, so verhalten sie sich wie ihre **Höhen**; denn nach §. 173. ist $m:n=ab:ad$, und nach §. 215. Rechenk. $m:n=b:d$. Auf eben diese Art ist auch klar daß sie sich wie ihre **Grundlinien** verhalten müssen, wenn ihre Höhen gleich sind.

Zusatz.

Fig. 109. §. 175. Da der Inhalt eines Parallelograms $m=ab$ ist §. 172. so ist auch $\frac{m}{a}=b$, oder $\frac{m}{b}=a$ §. 169. N. 3. Rechenk. aus diesem Grunde kan man also von einem Parallelogram, dessen Inhalt und Grundlinie, oder Höhe bekannt ist, entweder die **Höhe** oder **Grundlinie** finden, wenn man nehmlich den

In-

Inhalt, durch die gegebene Linie dividiret. Desgleichen läßt sich hiernach ein Rektangel in ein anderes von gleichem Inhalte, wovon eine Seite gegeben ist, verwandeln, wenn man den Inhalt ab durch die gegebene Seite d dividiret; denn nach §. 173. ist b:d = x:a, und also ab = dx, folglich $\frac{ab}{d} = x$ der zufindenden Seite des neuen Rektangels.

Zusatz.

§. 176. Wenn ein Rektangel einem Quadrate an Inhalte gleich ist, so ist die Seite des Quadrats die mitlere Proportional zwischen den Seiten des Rektangels. Denn wenn ab = xx, so ist a:x = x:b und $\sqrt{ab}$ Fig. 111. = x. Vermöge diesem gefundenen Wehrte von x, oder der Seite des Quadrats; kan also ein iedes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandelt werden.

Sol dieses auf geometrische Art geschehen, so mus man zwischen den zwo Seiten des Rektangels nach §. 157. eine mitlere Proportionallinie für die Seite des Quadrats suchen. Diese ganze Berechnungsart der Parallelogrammen läßt sich auch noch aus einem andern Grunde herleiten. Wenn man sich nehmlich vorstellet, daß die Fläche des Parallelograms ABED von lauter geraden und paral- Fig. 114. lelen Linien, oder von unendlich schmalen Flächen, die durch Linien ausgedrückt werden können, und da-

her Elemente heissen, zusammen gesetzet sei, so ist die Summe derselben der Inhalt des Parallelograms. Da nun die Elemente alle einander und der Grundlinie gleich sind §. 56. die Anzahl derselben aber durch die Höhe DC ausgedrückt wird, so bestehet die Summe der Elemente oder der Flächen Inhalt aus dem Produkte der Grundlinie in die Höhe.

Lehrsatz.

Fig. 112. §. 177. Ein Dreieck ABC ist die Hälfte eines Parallelograms ABDC, so mit demselben gleiche Grundlinie AB, und Höhe CE hat.

Beweis: Da nach der Erklärung eines Parallelograms die Seiten AC und BD, wie auch AB und CD Parallel sind, so ist der Winkel ACB = CBD, und DCB = CBA §. 54. da ferner die Dreiecke ABC und CBD die Seite CB gemein haben, so sind sie einander gleich §. 34. und also ist das Dreieck ABC die Hälfte von dem Parallelogram ABDC, welches mit demselben gleiche Grundlinie AB, und Höhe CE hat.

Zusatz.

§. 178. Hieraus können nun folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie, und halben Höhe, oder aus der halben Grund-

linie und ganzen Höhe. §. 168. und 172.

2. Zwei Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen, oder so zwischen zwo Parallelen stehen, haben gleiche Inhalte §. 170. und 171.

3. Die Inhalte zweier Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und halben Höhen, d. i. wenn m der Inhalt, a die Grundlinie, b die Höhe des einen, und n der Inhalt, c die Grundlinie, d die Höhe des andern ist, so ist $m:n = a \times \frac{b}{2} : c \times \frac{d}{2}$; und es stehen also die Inhalte der Dreiecke in einem zusammengesetzten Verhältnis ihrer Grundlinien, und ganzen oder halben Höhen. Wenn demnach ihre Inhalte gleich sind, nehmlich $\frac{ab}{2} = \frac{cd}{2}$, so ist $a:c = d:b$, oder $a:c = \frac{d}{2}:\frac{b}{2}$. §. 212. Rechenk. oder: die Grundlinien verhalten sich gegeneinander, wie umgekehrt die Höhen. §. 173.

4. Haben zwei Dreiecke gleiche Grundlinien, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, und umgekehrt. §. 174.

5. Da der Inhalt eines Dreiecks $m = a \times \frac{b}{2}$ ist, so ist auch $\frac{m}{a} = \frac{b}{2}$ oder $\frac{m}{\frac{1}{2}b} = a$, §. 169. N. 3. Rechenk. Daher kan man von

 ei-

einem Dreiecke dessen Inhalt und Grundlinie, oder Höhe gegeben ist, allezeit die unbekante Linie finden, wie §. 175. von Parallelogrammen geschehen.

6. Die Seite eines Quadrats, welches einem Dreiecke an Inhalte gleich, ist die mitlere Proportional zwischen der Grundlinie, und halben Höhe des Dreiecks. Denn wenn $a \times \frac{b}{2} = xx$, so ist $a : x = x : \frac{b}{2}$, §. 212. Rechenk. und $\sqrt{a \times \frac{b}{2}} = x$. Dieses giebt Gelegenheit, die Seite eines Quadrats zu finden, daß einem gegebenen Dreiecke an Inhalte gleich sein sol, indem man nur zwischen der Grundlinie und halben Höhe desselben eine mitlere Proportional suchen darf. Wäre aber ein Quadrat aa gegeben, daß in ein Dreieck von gleichem Inhalte verwandelt werden solte, wovon die Grundlinie c gegeben, die Höhe x aber zu finden wäre, so setze man $aa = \frac{cx}{2}$, so ist $\frac{2aa}{c} = x$, und auf eben diese Art ist zu verfahren, wenn die Höhe gegeben, und die Grundlinie zu finden wäre.

Diese Lehre von dem Inhalte der Dreiecke läst sich ebenfals aus dem Begriffe der Elemente, so mit der Grundlinie parallel lauffen, herleiten. Denn

Denn weil sie eine gleiche, obgleich unendlich kleine Breite haben, so wird dadurch die Höhe AD, Fig. 113. welche die Anzahl der Elemente ausdrücket in lauter gleiche Teile geteilet, und die von den Elementen bis zur Spitze A des Dreiecks gezogene Perpendikularen stehen in einer arithmetischen Progression. §. 203. Rechenk. Nun aber verhalten sich in einem Dreiecke die mit einer Seite desselben parallel gezogene Linien, folglich auch die Elemente, wie die Höhen §. 130. u. 140. Daher stehen auch die Elemente in einer arithmetischen Progression, wovon das gröste oder letzte Glied die Grundlinie BC, das erste aber der Scheitelpunkt A des Dreiecks ist, so demnach kein Element der Fläche mehr sein kan, sondern durch 0 ausgedrückt werden müs. Nun wird die Summe einer arithmetischen Progression gefunden, wenn man das erste und letzte Glied, oder wenn das erste = 0, das letzte Glied allein mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret §. 269. Rechenk. Folglich bestehet auch die Summe der Elemente, oder der Inhalt eines Dreieckes aus dem Produkte der Grundlinie in die halbe Höhe, oder ist $BC \times \frac{AD}{2}$.

Lehrsatz.

§. 179. Die Flächen Inhalte ähnlicher Parallelogrammen verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten und Höhen.

Beweis: Weil in ähnlichen Figuren alle Winkel gleich, und die gleichnahmigte Seiten

proportional sind, §. 144. so ist in den rechtwinklichten Dreiecken ACD und acd der Winkel DAC = dac, ACD = acd, und daher beide Dreiecke einander ähnlich, §. 139. folglich:

Fig. 114. DC : dc = AD : ad. ferner ist
AB : ab = AD : ad.

Wenn man nun die Glieder beider Proportionen durcheinander multipliciret, so bekomt man

$$AB \times DC : ab \times dc = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2.$$

§. 216. Rechenk.

Nun sind aber AB × DC, und ab × dc die Inhalte der beiden ähnlichen Parallelogrammen ABDE, und abde §. 172. und $\overline{AE}^2$, und $\overline{ae}^2$ die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten; also verhalten sich die Inhalte ähnlicher Parallelogrammen, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten. Desgleichen, weil

AD : ad = DC : dc, so ist auch

$\overline{AD}^2 : \overline{ad}^2 = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2$. §. 217. Rechenk.

Folglich ist auch AB × DC : ab × dc = $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2$, d. i. die Inhalte verhalten sich auch gegeneinander wie die Quadrate der Höhen. Auf gleiche Art könte auch erwiesen werden, daß sich die Inhalte gegeneinander wie $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ verhalten.

Zu=

Zusatz.

§. 180. Da die Dreiecke Hälften von Parallelogrammen sind, §. 177. so müssen sich auch bei ähnlichen Dreiecken die Inhalte wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten und Höhen verhalten. §. 215. Rechenk.

Aufgabe.

§. 181. Zu einem gegebenen Parallelogram ABDE ein ähnliches abde zu machen, deren Inhalte in einer gegebenen Verhältnis zu einander stehen sollen. Fig. 115.

Auflösung: Man setze, daß sich der Inhalt des ersten zu dem Inhalte des andern, wie m zu n verhalten solle, 1. so quadriret die Seite AD des ersten Parallelograms, multipliciret dieses Quadrat mit der Grösse n, die in der Verhältnis den Inhalt des zweiten vorstellet; dividiret hierauf das Produkt durch m, so den Inhalt des ersten anzeiget, und endlich ziehet aus dem Quotienten die Wurzel, so wird dieselbe die gesuchte Seite ad geben.

2. Quadriret auf eben die Art die Grundlinie AB des ersten Parallelograms, multipliciret dieses Quadrat mit n, und dividiret das Produkt durch m; ziehet aus dem Quotienten die Wurzel, so erhält man die Grundlinie ab, wo sich alsdenn aus beiden ad, und

ab leicht das Parallelogrammum beschreiben läst.

Beweis: nach §. 179. bekommen wir

$$m:n = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2, \text{ und}$$

$$m:n = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2, \text{ folglich ist}$$

$$\frac{\overline{AD}^2 \times n}{m} = \overline{ad}^2, \text{ und}$$

$$\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m} = \overline{ab}^2, \text{ §. 211. Rechenk.}$$

Derowegen ist $\sqrt[2]{\frac{\overline{AD}^2 \times n}{m}} = ad$, und

$$\sqrt[2]{\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m}} = ab.$$

Auf die nehmliche Art würde man zu verfahren haben, wenn man zu einem gegebenen Dreieck ein ähnliches von einem gegebenen Inhalt zu machen hätte.

Wäre das gegebene Parallelogram nicht rechtwinklicht, sondern schiefwinklicht, so mus auch der Winkel DAB gegeben sein, und die in dem gesuchten Parallelogram gefundene zwo Seiten müssen nach demselben zusammen gesetzet werden. Fig. 114.

Lehrsatz.

Fig. 116. §. 182. In iedem rechtwinklichtem Dreiecke ABC, ist das Quadrat der Hypothenuse gleich

gleich den Quadraten der beiden Catheten, oder der zwo andern Seiten die den rechten Winkel einschliessen, zusammen genommen.

Beweis: Man lasse aus der Spitze des rechten Winkels B die Perpendikular BE auf die entgegen stehende Seite AC fallen, so werden die Dreiecke AEB, BEC und ABC einander ähnlich §. 152. und derowegen ist

AE : AB = AB : AC, und

EC : BC = BC : AC, nach §. 153.

Nun geben uns die Produkte der mitlern und äussern Glieder in der ersten Proportion:

$$\overline{AB}^2 = AC \times AE = AG \times AE;$$

und in der zwoten:

$$\overline{BC}^2 = AC \times EC = CF \times EC.$$

Die zwei Rektangel AG × AE, und CF × EC aber sind gleich dem Quadrate der Seite AC, und also ist

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

d. i. das Quadrat der Hypothenuse ist gleich den Quadraten der beiden andern Seiten zusammen genommen.

Man kan diesen Lehrsatz auch nur als eine Folge von dem §. 179. gegebenen ansehen; denn wenn man betrachtet, daß in den ähnlichen Dreiecken AEB, BEC und ABC sich die Flächen Inhalte wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten verhalten, so bekommen wir, wenn der Flächen Inhalt von AEB = m, von BEC = n, und von ABC = S ist:

$m : \overline{AB}^2 = n : \overline{BC}^2 = S : \overline{AC}^2$, und weil
$m + n = S$, so ist auch
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$.

Aufgabe.

Fig. 117. §. 183. Wenn von einem rechtwinklichten Dreieck zwo Seiten gegeben, die dritte zu finden.

Auflösung: 1. Wenn AB und BC gegeben, und AC gefunden werden sol, so setzet
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, §. 182. daher ist

$\sqrt[2]{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = AC$. §. 169. der Rechenk.

2. Wenn AC und AB gegeben, und man BC finden sol, so ist wiederum
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, und also
$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$. Folglich ist

$\sqrt[2]{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = BC$. §. 169. der Rechenk.

Eben so hätte man auch zu verfahren, wenn die Seite AB zu suchen wäre.

Aufgabe.

Fig. 117. §. 184. Am Ende einer Linie BC eine Perpendikular AB aufzurichten.

Auflösung: Erwählet drei Linien AB, BC und AC, die so beschaffen sind, daß die Summe der Quadrate der beiden kleinern dem

dem Quadrate der grössern gleich sei; beschreibet hieraus mit ihnen ein Dreieck ABC, so wird es, nach §. 182. rechtwinklicht, folglich AB perpendikular auf BC sein.

Die einfachsten Teile, die man den drei Linien geben kan, und die in der Ausübung am bequemsten fallen, sind 3, 4, 5. Denn 3×3 =9, 4×4=16, und 5×5=25, folglich ist 9+16=25.

Aufgabe.

§. 185. Ein Quadrat zu beschreiben, das mehrern gegebenen am Inhalte gleich sei.

Auflösung: Man setze, es wären die Quadrate m, n und p gegeben, man solle ein anderes S finden, so den Inhalt der dreien zusammen genommen hätte. Zu diesem Ende beschreibet mit den Seiten der Quadraten m und n einen rechten Winkel BAC, und ziehet die Linie BC, so wird das Quadrat O den beiden Quadraten m und n gleich sein, §. 182. richtet ferner in B eine Perpendikular BD auf, machet sie der Seite des Quadrats p gleich, und ziehet die Linie DC, so wird das darauf beschriebene Quadrat S den Quadraten p+o, oder vielmehr p+m+n gleich sein §. 183. Fig. 118.

Zusaz.

§. 186. Da sich ähnliche Parallelogrammen und Dreiecke, wie die Quadrate ihrer gleich-

gleichnahmigten Seiten verhalten, §. 179. und 180. so werden auch zwei derselben, wenn zwo ihrer gleichnahmigten Seiten in einen rechten Winkel zusammen gestellet werden, einem dritten gleich sein, daß mit der nehmlichen Seite auf der Hypothenuse stehet. Folglich kan man aus eben dem Grunde zwei oder mehrere Parallelogrammen oder Dreiecke in ein anderes ähnliches verwandeln, daß den andern zusammen genommen gleich ist.

Lehrsatz.

Fig. 119. §. 187. In einem spitzwinklichten Dreiecke ABC, ist das Quadrat der einem spitzigen Winkel A entgegen gesetzten Seite BC, gleich den Quadraten der zwo Seiten AB und AC (die den Winkel A einschliessen) weniger zweien Rektangeln, die entstehen, wenn man die Seite AC durch den Teil AD, der von der Spitze des Winkels A bis an die von B auf AC herabgelassene Perpendikular reichet, multipliciret.

1) Vorbereitung: Es sei die Linie AB = a, BC = b, AC = c, BD = x und AD = y; so ist DC = c − y. Wir haben demnach zu erweisen daß

$$bb = aa + cc - 2cy.$$

Be-

Beweis: Weil nach der Bedingung BD perpendikular auf AC ist, so sind ADB, und CDB rechtwinklichte Dreiecke, und daher ist

$$aa = xx + yy,$$

und $bb = xx + cc - 2cy + yy.$

§. 182. Nun können wir anstaat der ersten Gleichung setzen

$aa - yy = xx$, §. 169. der Rechenk.

und in der zwoten Gleichung den gleich gefundenen Werth von x substituiren, §. 179. Rechenk. so erhalten wir:

$$bb = aa - yy + cc - 2cy + yy.$$

Da sich nun yy in dem zweiten Gliede aufhebet, so ist eigentlich

$$bb = aa + cc - 2cy,$$

welches zu erweisen war.

Aufgabe.

§. 188. An einem spitzwinklichten Dreiecke, Fig. 119. woran alle drei Seiten gegeben, die beide Segmente AD und CD, in welche die Grundlinie AC von der Perpendikular DB geteilet wird, und die Perpendikular oder die Höhe DB selbst zu finden.

Auflösung: Wenn wir die vorige algebraische Benennungen beibehalten, so bekommen wir anstaat der letzten Gleichung

$$bb = aa + cc - 2cy.$$

Erstlich durch die Versetzung

2cy

$$2cy = aa + cc - bb.$$

Denn durch die Division

$$y = \frac{aa + cc - bb}{2c} = AD.$$

Und weil $c - y = DC$, so ist auch DC gefunden. Um nun noch die Höhe DB zu finden, so betrachten wir das rechtwinklichte Dreieck ADB, in welchem wir nunmehro die beide Seiten a und y kennen, folglich können wir auch nach §. 183. die dritte Seite x finden, wenn wir setzen:

$$aa - yy = xx, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{aa - yy} = x.$$

Zusatz.

§. 189. Aus eben diesem Grunde, kan man gegenteils in einem Dreiecke, wovon die Höhe DB, und die beide Segmente der Grundlinie AD und DC bekant sind, auch die zwo Seiten AB und BC leicht finden, weil

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2, \text{ und}$$

$$\overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2, \text{ folglich}$$

$$\sqrt[2]{\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2} = AB, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{\overline{DC}^2 + \overline{DB}^2} = BC.$$

Lehr=

Lehrsatz.

§. 190. In einem stumfwinklichten Dreiecke ABC, ist das Quadrat der den stumfen Winkel A entgegen gesetzten Seite BC gleich den Quadraten der zwo Seiten AB und AC, mehr zweien Rechtecken, die entstehen, wenn man die Grundlinie AC, mit dem bis zur Perpendikular verlängerten Teil AD derselben multipliciret. Fig. 120.

Vorbereitung: Es sei $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $AD = y$ und die Perpendikular $DB = x$; so haben wir zu erweisen, daß

$$bb = aa + cc + 2cy.$$

Beweis: Weil nach der Bedingung DB perpendikular auf CD ist, so sind die zwei Dreiecke ADB und CDB rechtwinklicht, und wir können nach §. 182. setzen

$$aa = xx + yy,$$

$$\text{und } bb = xx + cc + 2cy + yy.$$

Nun läßt sich in der ersten Gleichung der Wehrt von xx nach §. 169. Rechenk. allein bringen, wenn man setzet.

$$aa - yy = xx.$$

Bedienen wir uns nun in der zwoten Gleichung, anstaat xx seines gefundenen gleichen Wehrts, so haben wir

$$bb = aa - yy + cc + 2cy + yy,$$

und weil sich yy im zweiten Gliede aufhebet, so ist eigentlich

bb

$$bb = aa + cc + 2cy,$$

welches zu erweisen war.

Aufgabe.

§. 191. Wenn in einem stumfwinklichten Dreiecke alle drei Seiten gegeben, die Verlängerung AD der Grundlinie, bis an die Perpendikular DB, und diese Perpendikular selbst zu finden.

Auflösung: Wenn wir die vorige algebraische Benennungen beibehalten, so bekommen wir aus der vorigen Gleichung

$$bb = aa + cc + 2cy.$$

Erstlich durch die Versetzung,

$$bb - aa - cc = 2cy,$$

und durch die Division:

$$\frac{bb - aa - cc}{2c} = y = AD,$$

um also noch die Höhe DB zu finden, so betrachten wir das rechtwinklichte Dreieck ADB; in welchem wir die Seiten a und y kennen, folglich können wir nach §. 183. die dritte Seite x finden, wenn wir setzen:

$$aa - yy = xx, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{aa - yy} = x = DB.$$

Zusatz.

§. 192. Hätte man in einem stumfwinklichten Dreiecke die Grundlinie AC, ihre Verlän-

längerung AD bis an die Perpendikular, und die Höhe DB des Dreiecks bekant, so lassen sich auch die andere zwo Seiten AB und BC finden, wenn man setzet:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2, \text{ und}$$
$$\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2. \text{ Folglich ist}$$
$$\sqrt[2]{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = AB, \text{ und}$$
$$\sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2} = BC.$$

Drittes Hauptstück.

Von der Ausmessung der Vielecke.

Lehrsatz.

§. 193.

Der Flächen Inhalt eines ieden regelmässigen Polygons ist gleich dem Produkt aus der Perpendikular, die vom Mittelpunkt auf eine Seite gefället wird, durch die halbe Summe der Seiten.

Beweis: Jedes regelmässiges Polygon ABEFGH kan in so viele gleiche Dreiecke wie ADB, die mit ihrer Spitze im Mittelpunkt A zusammen treffen, eingeteilet werden, als Fig. 121.

das Polygon Seiten hat, §. 111. und diese Dreiecke machen zusammen den Inhalt des ganzen Polygons aus; nun ist aber der Inhalt eines solchen Dreiecks gleich dem Produkt aus der Grundlinie und halben Höhe, oder aus der halben Grundlinie, und ganzen Höhe, d. i. $= \frac{AB \times DC}{2}$ §. 178. also mus der Inhalt des ganzen Polygons aus so vielen solchen Produkten bestehen, als dasselbe Dreiecke oder Seiten hat, d. i. wenn die Anzahl der Seiten $= p$, so ist der Inhalt $= n \frac{AB \times DC}{2} = \frac{nAB}{2} \times DC = nAB \times \frac{DC}{2}$. Folglich ist das Produkt aus der halben Summe der Seiten in die Höhe eines Dreieckes, oder auch das Produkt aus der ganzen Summe der Seiten in die halbe Höhe, gleich dem Inhalte des Polygons.

Zusatz.

§. 194. Um also ein regelmässiges Polygon zu berechnen, mus man die halbe Summe der Seiten durch die Höhe, oder auch die ganze Summe der Seiten durch die halbe Höhe multipliciren.

Zusatz.

Fig. 122. §. 195. Da ein unregelmässiges Polygon wie ABCDEF, nicht aus gleichen Seiten, und

folg-

folglich auch nicht aus gleichen Dreiecken bestehet, so läst es sich nicht auf obige Art berechnen, sondern wenn man seinen Inhalt verlanget, so teilet man es zuvor in lauter Dreiecke nach Belieben ein; rechnet iedes davon nach §. 178. besonders aus, so ist die Summe ihrer Inhalte dem Inhalte des Polygons gleich.

Zusatz.

§. 196. Wenn ein Polygon wie ABCDEFGHI u. s. w. meistens aus krummen Linien bestehet, so hat man es, um seinen Inhalt zu berechnen, so viel möglich in ein geradlinichtes zu verwandeln, d. i. man mus es mit so viel Dreiecken ausfüllen, daß von der krummlinichten Figur ausser denselben weder etwas übrig bleibe, noch in dieselbe ein Raum mit begriffen werde, der zur Figur nicht gehöret. Jedes dieser Dreiecken wird insbesondere berechnet, und denn alle in eine Summe gebracht, welche den Inhalt des Polygons um so genauer geben wird, ie sorgfältiger solches mit Dreiecken ausgefüllet worden. Fig. 123.

Zusatz.

§. 197. Es kan sich ereignen, daß man in eine Fläche, um sie in die zur Berechnung nöhtige Dreiecke zu teilen, und die Linien der- Fig. 124.

selben auszumessen, nicht kommen kan, wie ABCDEFG; in diesen Falle ziehet um dieselbe ein Dreieck HIL, oder eine andere Figur, die sich bequem berechnen läst, ohne daß man innerhalb derselben etwas auszumessen nöhtig habe. Berechnet sie nach der gegebenen Anleitung, und hierauf auch die Dreiecke AGL, BCI, EDH und EFH, um welche die Figur grösser ist, als die gegebene; ziehet die Summe der letztern von dem gefundenen Inhalte der erstern ab, so ist der Ueberrest der Inhalt der gegebenen Fläche.

Man kan auch die Berechnung einer Fläche, in die man nicht kommen kan, vornehmen, wenn man sie nach einem veriüngten Maasstabe genau auf einem Papier entwirft, und sie daselbst gehörig in Dreiecke einteilet.

Lehrsatz.

§. 198. Der Inhalt eines Trapeziums ist gleich dem Produkte aus der Summe der zwo parallelen Seiten, und der halben Höhe, oder aus der halben Summe der parallelen Seiten, und der ganzen Höhe.

Fig. 125. Beweis: Das Trapezium ABCD, wird durch die Diagonal AC in zwei Dreiecke ABC und ADC geteilet, die einerlei Höhe EC haben, weil sie zwischen zwo Parallelen stehen §. 52. und die zusammen dem Inhalte des

Tra-

Trapeziums gleich sind; nun ist aber der Inhalt des ersten Dreiecks $= AB \times \frac{EC}{2}$ oder $\frac{AB}{2} \times EC$, und der Inhalt des zweiten $= DC \times \frac{EC}{2}$, oder $\frac{DC}{2} \times EC$, §. 178. also ist der Inhalt eines Trapeziums $= AB \times \frac{EC}{2} + DC \times \frac{EC}{2}$, oder $\frac{AB}{2} \times EC + \frac{DC}{2} \times EC$, d. i.

$$\overline{AB + DC} \times \frac{EC}{2},$$

oder $\frac{AB + DC}{2} \times EC$.

Zusatz.

§. 199. Um also den Inhalt eines Trapeziums zu berechnen, so mus man die zwo parallele Seiten addiren, und ihre Summe durch die halbe Höhe, oder die halbe Summe durch die ganze Höhe multipliciren. Oder, wenn man die Höhe CE in F in zweien gleiche Teile teilet, und die Parallel GH ziehet, so wird solche $= \frac{AB + DC}{2}$ §. 198. oder sie ist die mitlere arithmetische Proportionallinie zwischen den beiden parallelen Seiten. §. 247. Rechenk. Daher darf man nur diese mitlere Linie GH durch die ganze Höhe multipliciren.

Diese ganze Berechnung eines Trapeziums kan auch aus dem Begriffe der Elementen hergeleitet werden.

Zusatz.

Fig. 126. §. 200. Da die Figur ABCDEFG u. s. w. aus lauter Trapezien bestehet, die einerlei Höhe NO haben, so findet man ihren Inhalt, wenn man die halbe Summe ihrer parallelen Seiten durch die gemeinschaftliche Höhe NO multipliciret. Denn es ist einerlei, ob man die halbe Summe der parallelen Seiten eines ieden insbesondere oder aller zusammen auf einmal multipliciret, oder man ziehet eine mitlere Linie MPRST die zu AB, BC u. s. f. parallel ist, und die Höhe NO in zween gleiche Teile teilet; und multipliciret dieselbe durch die Höhe NO §. 199.

Lehrsatz.

§. 201. Aehnliche Polygons verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Fig. 127. **Beweis:** Weil ähnliche Polygons ABCDE und abcde durch Diagonalen in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreiecke zerteilet werden, §. 144. so ist das Dreieck

$$ABE : abe = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$
$$BCE : bce = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$$
$$CDE : cde = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2. \text{ §. 180.}$$

Nun

Nun sind die Polygons, vermöge der Voraussetzung, einander ähnlich, folglich stehen die gleichnahmigte Seiten derselben in Proportion, §. 137. und daher ist

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd,$$

folglich auch

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2,$$

§. 217. Rechenk.

Deswegen sind auch die Dreiecke selbst

$$ABE : abe = BCE : bce = CDE : cde,$$

§. 204. Rechenk. folglich

$$ABE + BCE + CDE : abe + bce + cde = ABE : abe,$$ §. 214. Rechenk.

Da nun

$$ABE : abe = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2,$$

so ist auch

$$ABE + BCE + CDE : abe + bce + cde = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2.$$

Die Summe der ersten Dreiecke ist aber das erste Polygon, und die Summe der andern das zweite; folglich verhalten sich die Polygone selbst gegeneinander, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Dieser Lehrsatz begreift alle sowohl regelmässige als unregelmässige Vielecke unter sich, wenn sie nur einander ähnlich sind. Desgleichen kan auch auf eben die Art erwiesen werden, daß sie sich nicht nur gegeneinander verhalten wie die Quadrate der gleichnahmigten unmittelbaren Seiten, so sie einschliessen, sondern auch wie die Quadrate der Dia-

Diagonalen, und aller übrigen gleichnahmigten Linien, so nur in denselben gezogen werden können.

Aufgabe.

Fig. 128. §. 202. Zu einem gegebenen Polygon ABDEFG ein anderes abdefg zu finden, welches mit dem erstern in einer verlangten Verhältnis m:n stehe.

Auflösung: 1. Wenn das Polygon regelmässig ist, so hat man nur eine Seite ab, und den Radius ai zu suchen, indem man nach §. 201. setzet.

Erstlich $m:n = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, folglich ist

$$\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m} = \overline{ab}^2, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m}} = ab.$$

Zweitens $m:n = \overline{AI}^2 : \overline{ai}^2$, also ist

$$\frac{\overline{AI}^2 \times n}{m} = \overline{ai}^2, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{\frac{\overline{AI}^2 \times n}{m}} = ai.$$

Beschreibet man nun mit ai einen Zirkel, und träget ab auf dem Umkreise herum, so wird das Polygon dem gegebenen ähnlich sein, und mit ihm in dem verlangten Verhältnis wie m:n stehen.

2.

2. Ist aber das gegebene Polygon unregelmässig, so suchet man auf eben die Art die Seiten, die zur Beschreibung des ähnlichen nöhtig sind, und beschreibet es nach §. 145.

Aufgabe.

§. 203. Ein Polygon A zu beschreiben, das zweien gegebenen ähnlichen B und C ähnlich, und an Inhalt gleich sei. Fig. 129.

Auflösung. Quadriret die gleichnahmigte Seiten EF, und DF der gegebenen Polygons, addiret ihre Quadrate zusammen, und ziehet aus der Summe die Wurzel, so bekomt ihr die Seite DE des neuen Polygons, welches die verlangte Eigenschaft hat. Oder machet mit zwo gleichnahmigten Seiten DF, und FE der gegebenen Polygons einen rechten Winkel DFE, und ziehet die Hypothenuse DE, so wird dieselbe die gleichnahmigte Seite des neuen Polygons sein. Das übrige geschiehet nach §. 145.

Beweis. $\overline{DF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{DE}^2$, §. 182. da dieses nun die Quadrate der gleichnahmigten Seiten der Polygone C, B und A sind, und ähnliche Polygone sich wie die Quadrate dieser Seiten gegeneinander verhalten, §. 201. so ist auch das Polygon A den beiden gegebenen C und B zusammen genommenen gleich.

Diagonalen, und aller übrigen gleichnahmigten Linien, so nur in denselben gezogen werden können.

Aufgabe.

Fig. 128. §. 202. Zu einem gegebenen Polygon ABDEFG ein anderes abdefg zu finden, welches mit dem erstern in einer verlangten Verhältnis m:n stehe.

Auflösung: 1. Wenn das Polygon regelmässig ist, so hat man nur eine Seite ab, und den Radius ai zu suchen, indem man nach §. 201. setzet.

Erstlich $m:n = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, folglich ist

$$\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m} = \overline{ab}^2, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{\frac{\overline{AB}^2 \times n}{m}} = ab.$$

Zweitens $m:n = \overline{AI}^2 : \overline{ai}^2$, also ist

$$\frac{\overline{AI}^2 \times n}{m} = \overline{ai}^2, \text{ und}$$

$$\sqrt[2]{\frac{\overline{AI}^2 \times n}{m}} = ai.$$

Beschreibet man nun mit ai einen Zirkel, und träget ab auf dem Umkreise herum, so wird das Polygon dem gegebenen ähnlich sein, und mit ihm in dem verlangten Verhältnis wie m:n stehen.

2.

2. Ist aber das gegebene Polygon unregelmässig, so suchet man auf eben die Art die Seiten, die zur Beschreibung des ähnlichen nöhtig sind, und beschreibet es nach §. 145.

Aufgabe.

§. 203. Ein Polygon A zu beschreiben, das zweien gegebenen ähnlichen B und C ähnlich, und an Inhalt gleich sei. Fig. 129.

Auflösung. Quadriret die gleichnahmigte Seiten EF, und DF der gegebenen Polygons, addiret ihre Quadrate zusammen, und ziehet aus der Summe die Wurzel, so bekomt ihr die Seite DE des neuen Polygons, welches die verlangte Eigenschaft hat. Oder machet mit zwo gleichnahmigten Seiten DF, und FE der gegebenen Polygons einen rechten Winkel DFE, und ziehet die Hypothenuse DE, so wird dieselbe die gleichnahmigte Seite des neuen Polygons sein. Das übrige geschiehet nach §. 145.

Beweis. $\overline{DF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{DE}^2$, §. 182. da dieses nun die Quadrate der gleichnahmigten Seiten der Polygone C, B und A sind, und ähnliche Polygone sich wie die Quadrate dieser Seiten gegeneinander verhalten, §. 201. so ist auch das Polygon A den beiden gegebenen C und B zusammen genommenen gleich.

Zusatz.

§. 204. So wie ein Quadrat beschrieben wird, das mehrern gegebenen zusammen genommen gleich ist §. 185. so kan solches aus eben dem Grunde auch mit allen übrigen ähnlichen Vielecken geschehen.

Aufgabe.

§. 205. Wenn der Inhalt eines regelmässigen Polygons, und die Zahl der Seiten desselben gegeben ist, die Länge einer Seite zu finden.

Auflösung: Beschreibet ein Polygon so dem gegebenen ähnlich ist, deren Seiten aber eine beliebige Länge haben, und alsdenn berechnet seinen Inhalt nach §. 194. Es sei nun der Inhalt dieses Polygons $= n$, dessen Seite ab ist; der Inhalt des gesuchten Polygons $= m$, und die mit der vorigen gleichnahmigte Seite desselben AB, so können wir nach §. 201. setzen

$$n : m = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2,$$

folglich ist $\frac{\overline{ab}^2 \times m}{n} = \overline{AB}^2$,

und $\sqrt[2]{\frac{\overline{ab}^2 \times m}{n}} = AB.$

Auf

Auf die nehmliche Art würde man zu verfahren haben, wenn anstaat einer Seite der Radius verlanget würde.

Aufgabe.

§. 206. Ein unregelmässiges Viereck (Trapezoides) ABCD in ein Dreieck von gleichen Inhalte zu verwandeln. Fig. 130.

Auflösung: Ziehet die Diagonal BD, und zu dieser die Linie CE parallel bis an die verlängerte Linie AE; hänget B und E mit einer Linie zusammen, so wird das Dreieck ABE, mit der gegebenen Fläche ABCD von gleichem Inhalte sein.

Beweis: Weil die Dreiecke BDC und BDE auf einer Grundlinie und zwischen zwo Parallelen stehen, so sind sie einander gleich, §. 178. N. 2.

Dahero ist $ABD + BDC = ABD + BDE$,

d. i. $ABCD = ABE$.

Zusatz.

§. 207. Auf die nehmliche Art lässet sich ein Fünfeck ABCDE in ein Dreieck FDG, so ihm an Inhalte gleich ist, verwandeln, wenn man erstlich AD und DB, denn EF und CG dazu parallel führet, und endlich die Linie DG und DF ziehet. Aus eben diesem Grunde lässet sich auch iedes andere Polygon in ein Fig. 131.

oder

oder mehrere Dreiecke, folglich diese wieder in eines verändern, indem man das obige Verfahren nur öfters wiederhohlet.

Zusatz.

§. 208. Sol ein Polygon, dessen Inhalt gegeben, in ein Dreieck von gleichem Inhalte durch die Rechnung verwandelt werden, so setzet den gegebenen Inhalt $= aa$, die Grundlinie des verlangten Dreieckes $= c$ und die gesuchte Höhe desselben $= x$, so ist $aa = \frac{cx}{2}$, und also $\frac{aa}{c} = \frac{x}{2}$, und $2\frac{aa}{c} = x$. Auf eben die Art wird auch verfahren, wenn die Höhe gegeben, und die Grundlinie zu finden wäre.

Aufgabe.

§. 209. Wenn der Inhalt eines Polygons gegeben, wie dasselbe in ein anderes unähnliches von gleichem Inhalte zu verwandeln, dazu die Anzahl der Seiten gegeben.

Auflösung: Beschreibet ein Polygon, welches dem gesuchten ähnlich ist, deren Seiten aber eine beliebige Länge haben können; berechnet seinen Inhalt §. 194. setzet denselben $= m$ eine Seite davon $= a$, den Inhalt des gegebenen Polygons $= n$, und die mit a gleichnahmigte Seite des gesuchten Polygons

gons $=x$; so bekommen wir nach §. 201. $m:n=a^2:x^2$.

Folglich ist $\frac{a^2n}{m}=x^2$.

und $\sqrt[2]{\frac{a^2n}{m}}=x$.

Wenn nun auf diese Art auch die übrige Seiten, wenn es nöhtig ist, gesuchet werden, so kan man das Polygon selbst daraus beschreiben.

Viertes Hauptstück.

Von der Zirkelfläche.

Lehrsatz.

§. 210.

Der Flächen Inhalt eines Zirkels ist gleich dem Produkte aus dem Radius, in den halben Umkreis.

Beweis: Es ist §. 193. erwiesen worden, daß der Flächen Inhalt eines regelmässigen Polygons dem Produkt aus dem halben Umkreise, oder aus der halben Summe der Seiten, durch die aus dem Mittelpunkt auf eine Seite gezogene Perpendikular, gleich sei.

Nun

Nun kan man aber nach §. 120. einen Zirkel als ein Polygon von unendlich vielen Seiten ansehen, wovon die aus dem Mittelpunkt darauf gezogene Perpendikularen dem Radius selbst gleich werden; also ist auch der Flächen Inhalt eines Zirkels gleich dem Produkt aus dem Radius in den halben Umkreis. Oder auch, dem Produkte aus dem ganzen Umkreise in den halben Radius, oder dem vierten Teil des Durchmessers.

Zusatz.

Fig. 132. §. 211. Wenn man also den Radius AB als die Höhe, und BC, so dem Umkreise gleich ist, als die Grundlinie eines rechtwinklichten Dreiecks ABC ansiehet, so folget, daß der Inhalt eines Zirkels einem Dreiecke gleich sei, welches den Radius zur Höhe, und den ganzen Umkreis zur Grundlinie hat. Denn nach §. 210. ist die Zirkelfläche $= \frac{BC}{2} \times AB$, und nach §. 178. N. 1. ist auch das Dreieck ABC $= \frac{BC}{2} \times AB$.

Zusatz.

§. 212. Siehet man den Radius AB als die Höhe, BD oder den halben Umkreis als die Grundlinie eines Rektangels ABDE an, so kan

kan man auch den Inhalt eines Zirkels als ein Rektangel ansehen, welches den Radius zur Höhe, und den halben Umkreis zur Grundlinie hat, denn BD × AB ist nach §. 210. dem Inhalt des Zirkels, und nach §. 168. dem Inhalt des Rektangels gleich.

Aufgabe.

§. 213. Den Flächen Inhalt eines Zirkels, dessen Durchmesser gegeben ist, zu finden.

Auflösung: Suchet erstlich zu dem gegebenen Durchmesser den Umkreis nach einer von den §. 149. gegebenen Verhältnissen; multipliciret hierauf den halben Umkreis durch den halben Durchmesser, oder den ganzen Umkreis durch den vierten Teil des Durchmessers, so ist das Produkt der Inhalt des Zirkels. §. 210.

Die richtige Auflösung dieser Aufgabe, worin die sogenante Quadratur des Zirkels bestehet, hänget demnach von der genauen Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise ab, und da solche noch nicht volkommen bestimmet ist, so ist offenbar, daß auch die Quadratur des Zirkels noch nicht eigentlich habe erfunden werden können. Dem ohnerachtet, weil die Verhältnis zwischen dem Durchmesser und dem Umkreise des Zirkels schon weit genauer bestimmet worden, als nur immer in der Ausübung, ohne einen Irtum zu besorgen, erfordert werden kan, so ist auch die Be-

Berechnung des Inhalts des Zirkels, oder die Quadratur desselben bereits viel schärfer entdeckt, als nur immer in dem Gebrauche nöhtig ist. Alle dahin gehörige Untersuchungen über diesen Gegenstand, sind also gegenwärtig nur noch blos theoretisch, und haben in die Ausübung nicht mehr den geringsten Einflus.

Wird z. B. der Durchmesser des Zirkels = 100 angenommen, so ist der Umkreis = 314, und der Inhalt = 7850. Suchet man denselben aber nach Erfordernis der Umstände mit grösserer Schärfe, so vermehre man die Zahlen der §. 149. gegebenen Verhältnis, und setze den Durchmesser = 1000, oder = 10000 u. s. w. so ist der Umkreis = 3141 oder = 31415 u. s. w. und der Inhalt des Zirkels = 785250 oder = 78537500 u. s. w.

Erklärung.

Fig. 133. §. 214. Ein Ausschnit (Sector) ist derjenige Teil BAE einer Zirkelfläche, der zwischen zween Radien und ihren Bogen BE begriffen ist.

Zusatz.

§. 215. Es hänget also in einem Zirkel die Grösse des Ausschnits von der Grösse, oder von der Anzahl der Grade des Winkels BAE ab; denn wenn die zween Schenkel BA, und EA eine gerade Linie GF, oder einen Winkel von 180° machen, so ist der Inhalt des Sektors der halben Zirkelfläche gleich; machen sie ei-

einen Winkel GAI von 90°, so ist der Inhalt desselben der vierte Teil der Zirkelfläche, und ist der Winkel noch spitziger, so ist auch der Inhalt des Sektors noch kleiner; so daß man überhaupt sagen kan, die Inhalte der Ausschnitte in einerlei Zirkelfläche verhalten sich gegeneinander, wie die Anzahl der Grade ihrer Winkel; oder auch der ganze Inhalt des Zirkels verhält sich zum Inhalte des Ausschnittes, wie 360° zu der Anzahl Grade des Winkels in dem leztern; oder wie der ganze Umkreis zu dem Bogen des Ausschnittes.

Wenn man sich vorstellet, daß der ganze Umkreis aus einer unendlichen Anzahl gerader Linien bestehe, so wird, wie §. 211. der Ausschnit einem Dreiecke gleich, wovon der Bogen BNE die Grundlinie, der Radius AN aber die Höhe ist; und kan folglich auch auf diese Art berechnet werden.

Aufgabe.

§. 216. Den Flächen Inhalt eines Ausschnits ABE, dessen Winkel, und Radius gegeben, zu finden. Fig. 133.

Auflösung: Suchet erstlich den Inhalt des ganzen Zirkels nach §. 213. und saget hierauf nach §. 215. wie 360° zu der Anzahl Grade des gegebenen Winkels, so verhält sich der Inhalt des Zirkels zu dem Inhalte des gesuchten Ausschnittes.

Erklärung.

Fig. 133. §. 217. Der **Abschnit** (Segmentum) einer Zirkelfläche ist der Teil DIC eines Sektors, der durch die Sehne DC davon abgeschnitten wird, oder zwischen einem Bogen und seiner Sehne enthalten ist.

Aufgabe.

Fig. 133. §. 218. Den Flächen Inhalt eines Abschnittes DIC zu finden.

Auflösung: 1. Wenn der Winkel DAC, der Radius AD, und die Sehne DC gegeben sind, so berechnet erstlich den Sektor DAC §. 216. ziehet hierauf von A auf DC eine Perpendikular AL, so wird sie DC in zween gleiche Teile teilen, §. 59. N. 2. und $\overline{AL}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{LC}^2$, folglich $AL = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{LC}^2}$. §. 183. sein. Ziehen wir nun den Inhalt des Dreiecks $DAC = DC \times \frac{AL}{2}$ von dem Inhalt des Ausschnittes ADIC ab, so verbleibet der Inhalt des Abschnittes DIC.

2. Wenn die Sehne DC, die Höhe IL, nebst dem Winkel DAC gegeben wären, so setzet erstlich um den Radius AD zu finden

$$IL : \frac{DC}{2} \text{ oder } DL = DL : LN \text{ nach §. 151.}$$

al-

also ist $\frac{\overline{DL}^2}{IL} = LN$,

und $\frac{LN + IL}{2} = AD$.

Das übrige ist, wie in der vorigen Auflösung.

In diesen beiden Auflösungen sind allezeit drei Stücke als bekant bedungen worden, obgleich eigentlich nur zwei dazu nohtwendig erfordert werden. Wie aber aus den zwei gegebenen die übrige gefunden werden müssen, wird erst die Trigonometrie lehren.

Zusatz.

§. 219. Wäre ein Teil wie ABCD einer Fig. 134. Zirkelfläche zu berechnen, so siehet man leicht, daß man zuvor die beide Ausschnitte AEBF und DECG, wie auch ihre Abschnitte AFB und CGD berechnen, und sie von der ganzen Zirkelfläche abziehen müsse, um den verlangten Teil zu bekommen.

Erklärung.

§. 220. Eine Fläche, so von zween Zirkelkreisen, wovon einer in der andern beschrieben ist, eingeschlossen wird, oder der Unterschied dieser beiden Zirkelflächen, heist eine Krone (Ring); insbesondere aber, wenn die beide Kreise einerlei Mittelpunkt haben, folglich parallel lauffen, d. i. concentrisch sind.

M 2 Auf-

Aufgabe.

§. 221. Den Flächen Inhalt einer Krone zu finden.

Auflösung: 1. Ueberhaupt berechnet den Flächen Inhalt des grössern Zirkels, dessen
Fig. 135. Durchmesser AG, und auch des kleinern, dessen Durchmesser CE ist; ziehet den kleinern Inhalt von dem grössern ab, so wird der Unterschied der Inhalt der Krone sein. §. 220.

2. Insbesondere, wenn die Kreise concentrisch sind. Addirt die Umkreise des grössern und kleinern Zirkels zusammen, und multipliciret die halbe Summe davon durch den Unterschied AC der Radien AD und CD, so ist das Produkt der Inhalt der Krone.

Beweis: Richtet auf das Ende des grössern Halbmessers DA eine Perpendikular AL auf, und machet sie dem Umkreise des grössern Zirkels gleich. Hierauf ziehet aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte die Linie DL. Endlich durch den Endpunkt des kleinern Halbmessers DC ziehet die Linie CH mit AL parallel. Da nun in den beiden ähnlichen Dreiecken DAL und DCH DA : DC = AL : CH §. 140. N. 2. und alle Umkreise der Zirkel sich auch gegeneinander verhalten, wie ihre Radien §. 148. so ist CH der Umkreis des kleinern Zirkels. Das Dreieck DAL ist also

auch

auch dem Inhalte des grössern, und das Dreieck DCH dem Inhalte des kleinern Zirkels gleich §. 211. folglich ist das Trapezium CALH ihr Unterschied, oder dem Inhalte der Krone gleich §. 220. Nun ist der Inhalt des Trapeziums dem Produkte aus der halben Summe der beiden parallelen Seiten CH und AL, durch die Höhe CA oder HM gleich, §. 198. folglich bestehet auch der Inhalt der Krone aus dem Produkte der halben Summe der beiden Umkreise, durch die Linie AC, oder durch den Unterschied der Radien.

Die erstere von diesen beiden Rechnungsarten ist zwar algemein, wird aber vorzüglich nur in dem Falle gebraucht, wenn die beide Kreise nicht einerlei Mittelpunkt haben, oder excentrisch sind, indem sie für andere Fälle zu weitläuftig sein würde.

Zusatz.

§. 222. Wenn man den Unterschied CA der beiden Halbmesser in B in zween gleiche Teile teilet, und dadurch mit AL die Parallel BI ziehet, so wird solche $= \frac{AL + CH}{2}$ und $BI \times CA$ ist der Inhalt des Trapeziums CALH §. 199. Nun ist aber auch nach dem vorhergehendem Beweise BI dem Umkreise eines Zirkels gleich, so mit dem Halbmesser DB beschrieben worden; folglich ist auch das Pro-

dukt aus diesem Umkreise durch CA der Inhalt des Trapeziums, also auch der Krone. Man kan also den Inhalt einer Krone noch auf eine kürzere Art finden, wenn man nehmlich zu DB, d. i. zu der Summe des kleinern Halbmessers und ihrem halben Unterschiede, den Umkreis suchet, und solchen mit dem Unterschiede der Radien multipliciret.

Dieses ist die Art, der man sich bedienet, wenn man den Durchschnit eines zirkelförmigen Gewölbes, oder dergleichen Flächen zu berechnen hat, weil sie bequemer als die vorige ist.

Lehrsatz.

§. 223. Alle Zirkelflächen verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer Radien, Durchmesser, oder Sehnen ähnlicher Bögen.

Beweis: Alle Zirkelflächen sind einander ähnlich, und man kan sie als regelmässige Polygons von unendlich kleinen Seiten ansehen, §. 148. da sich nun die Inhalte ähnlicher Polygons wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten verhalten §. 201. so verhalten sich auch die Zirkelflächen gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten, das ist: wie die Quadrate ihrer Radien, Durchmesser oder Sehnen ähnlicher Bögen.

Aufgabe.

§. 224. Aus dem gegebenen Inhalte und Radius eines Zirkels, den Radius eines andern Zirkels zu finden, dessen Inhalt zu dem gegebenen ein verlangtes Verhältnis haben sol.

Auflösung: Es sei der Radius des gegebenen Zirkels $= a$, sein Inhalt $= m$, der gesuchte Radius $= x$, und das Verhältnis beider Inhalte $= m : n$; so können wir nach vorigem Lehrsatze setzen:

$$m : n = aa : xx,$$

folglich ist $\frac{aa \times n}{m} = xx$,

und $\sqrt[2]{\frac{aa \times n}{m}} = x$.

Zusatz.

§. 225. Eben dieses läst sich auch auf ähnliche Ausschnitte, Abschnitte und andere ähnliche Teile der Zirkelflächen anwenden, weil sich ihre Inhalte nach §. 223. ebenfals wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten verhalten.

Aufgabe.

§. 226. Einen Zirkel zu beschreiben, der zween gegebenen an Inhalt gleich sei.

Auflösung: Quadriret die Durchmesser, oder Radien der gegebenen Zirkeln, addiret die Quadrate zusammen, und ziehet aus der Summe die Wurzel, so ist dieselbe der Durchmesser oder Radius des verlangten Zirkels.

Oder: Setzet die Durchmesser der gegebe-
Fig. 136. nen Zirkeln in einen rechten Winkel ABC zusammen, und ziehet die Hypothenuse AC, so ist sie der Durchmesser des verlangten Zirkels.

Beweis: Das Quadrat der Hypothenuse AC ist den beiden Quadraten von AB und BC zusammen genommen gleich §. 182. Nun verhalten sich die Zirkelflächen gegeneinander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser §. 223. folglich ist auch die Zirkelfläche, dessen Durchmesser AC ist, den beiden Zirkeln zusammen genommen gleich, deren Durchmesser AB und BC sind.

Zusatz.

§. 227. Eben dieses kan auch von ähnlichen Ausschnitten, Abschnitten und andern ähnlichen Teilen der Zirkelflächen verstanden werden, weil auch deren Inhalte sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Linien verhalten.

Zu-

Zusatz.

§. 228. Wären drei oder mehrere Zirkel, deren Durchmesser AB, BC und CD sind, Fig. 137. gegeben, und man solte einen Zirkel beschreiben, der ihnen an Inhalte gleich sei, so hat man mit ihren Durchmessern gänzlich so, wie §. 185. mit den Seiten der Quadraten geschehen, zu verfahren, um den Durchmesser AD des verlangten Zirkels zu bekommen.

Lehrsatz.

§. 229. Die Zirkelfläche ist gleich einem Quadrate, dessen Seite die mitlere Proportional zwischen dem Radius, und dem halben Umkreise ist.

Beweis: Ein Quadrat, dessen Seite die mitlere Proportional zwischen zwoen Seiten eines Rektangels, ist diesem Rektangel am Inhalte gleich §. 176. Nun ist aber der Inhalt eines Zirkels einem Rektangel gleich, so den Radius zur Höhe, und den halben Umkreis zur Grundlinie hat §. 212. Also ist auch die Zirkelfläche gleich einem Quadrate, dessen Seite die mitlere Proportional zwischen dem Radius und dem halben Umkreise ist.

Zusatz.

§. 230. Also kan man einen Zirkel in ein Quadrat von gleichem Inhalt verwandeln,

 wenn

wenn man zwischen dem Radius, und dem halben Umkreise eine mitlere Proportional suchet, so die Seite des verlangten Quadrats sein wird.

Aufgabe.

§. 231. Aus dem gegebenen Inhalt eines Zirkels den Durchmesser zu finden?

Auflösung: Suchet nach der algemeinen Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise den Inhalt des Zirkels davon §. 213. nennen wir nun denselben = m, seinen Durchmesser = a, und den Inhalt des gegebenen Zirkels = n, den gesuchten Durchmesser aber = x, so ist m : n = aa : xx §. 223.

Folglich ist $\frac{aa \times n}{m} = xx.$

und $\sqrt[2]{\frac{aa \times n}{m}} = x.$

Wenn der Durchmesser = 100, so ist der Inhalt des Zirkels = 7850. Folglich verhält sich in einem ieden Zirkel das Quadrat des Durchmessers zur Zirkelfläche, wie 10000 : 7850. Diese Verhältnis dienet teils, die gegenwärtige Aufgabe aufzulösen, teils auch, aus dem gegebenen Durchmesser den Inhalt des Zirkels zu finden, ohne erst den Umkreis zu suchen. Wäre in der Berechnung eine grössere Schärfe nöhtig, so sezet den Durchmesser = 1000 oder = 10000

u.

u. s. w. so wird alsdenn die Verhältnis des Quadrats des Durchmessers zur Zirkelfläche, wie 1000000 : 785250 oder wie 100000000 : 78537500. u. s. w. sein.

Zusatz.

§. 232. Auf eben diese Art hätte man auch zu verfahren, wenn man eine Zirkelfläche von einem gegebenen Inhalt in was immer für ein regelmässiges Polygon verwandeln wolte; denn man hätte ebenfals ein beliebiges aber dem verlangten ähnliches Polygon zu berechnen, dessen Inhalt = m eben so wohl als eine Seite = a bekant sind. Setzet man nun den Inhalt des gegebenen Zirkels, der auch dem gesuchten Polygon gleich sein mus = n, und eine Seite des Polygons = x, so ist

$$m : n = aa : xx \text{ §. 201.}$$

Folglich $\frac{aa \times n}{m} = xx.$

und $\sqrt{\frac{aa \times n}{m}} = x,$

womit alsdenn das Polygon beschrieben werden kan.



Fünf-



Fünftes Hauptstück.

Von Berechnung des Flächeninhalts und dem Toisiren.

§. 233.

Weil das Maas einer Fläche in einem Quadrate bestehet, so dabei zur Einheit oder zum Ganzen angenommen wird, §. 167. so wird dieses Ganze entweder nach dem zehnteiligen, oder nach dem zwölfteiligen Maasse in kleinere Teile und Einheiten zerleget; woraus denn ein gedoppeltes Maas entstehet, so bei Ausmessung der Flächen im Gebrauche ist.

§. 234. Wenn iede Seite des Quadrats, so zur Einheit des Maasses angenommen ist, in zehn gleiche Teile eingeteilet wird, so entstehet daraus das zehnteilige Maas §. 104. Rechenk. Nun enthält iedes Quadrat, dessen Seiten auf diese Art eingeteilet werden, hundert kleinere Quadrate, deren Seiten die vorhergehende Teile sind, §. 168. 169. Ist demnach das ganze eine Quadratruhte, so enthält solche 100 Quadratschuh; und aus eben dem Grunde ein Quadratschuh 100

Qua-

Quadratzolle; ein Quadratzol 100 Quadratlinien u. s. w.

Aus der blossen Erklärung des zehnteiligen Maasses und aus demienigen, so in der Rechenkunst von den zehnteiligen Brüchen gesagt worden, fliessen unmittelbar die Regeln, wie alle Rechnungsarten ohne Ausnahme damit vorgenommen werden müssen. Denn weil nach derselben bei dem Längenmaasse die Einteilung der Linien nach dem algemeinen zehnteiligen Maasse der Zahlen geschieht, so haben auch die Zahlen so sie ausdrücken, nicht mehr nöhtig, als benante sondern als blosse unbenante Zahlen angesehen zu werden, und fallen also auch alle bei den Rechnungen mit den ersten unvermeidliche Veränderungen und Weitläuftigkeiten von selbst hinweg. Auf eben diese Art hat man auch weder der Multiplikation nöhtig, um grössere Einheiten auf kleinere zu bringen, noch umgekehrt der Division um kleinere Einheiten in grössere zu verwandlen, sondern die Ziffern dürfen nur iedesmal in ihre gehörige Stelle und Entfernung von der Einheit gesetzt werden, um aus derselben so gleich ihren Wehrt und die Gattung von Teilen, so sie anzeigen sollen, zu erkennen, so sind z. B. $14^{\circ} = 14000'''$; und $27503''' = 27^{\circ}.\ 5'.\ 0''.\ 3'''$. alle vier einfache Rechnungsarten so wohl als die Ausziehungen der Wurzeln geschehen demnach damit unmittelbar wie mit den unbenanten Zahlen; und hierin bestehet der unwidersprechliche Vorzug des zehnteiligen Maasses vor allen übrigen.

Weil bei dem Flächenmaasse hundert kleinere Einheiten erst eine nächstfolgende grössere ausmachen,

chen, so müssen auf iede Gattung derselben zwo Ziffern gerechnet werden, um aus ihrer Stelle unmittelbar ihren Wehrt zu erkennen, oder die grössere Einheiten in kleinere, und die kleinere in grössere zu verwandlen. Wären z. B. 56 Quadratruhten in Quadratlinien zu verwandlen, so setzet 56, 00, 00, 00'''Q. oder es wären 47053. 005'''Q. auf höhere Einheiten zu bringen, so setzet 47°. 5'. 30''. 5'''Q. oder auch 47°. 05'. 30''. 05'''Q.

Es sei demnach die Grundlinie eines Rechtecks = 7°. 4'. 6''; die Höhe aber = 2'. 0''. 3'''. so ist der Flächeninhalt = 1°. 51'. 43''. 80'''. oder 1 Quadratruhte, 51 Quadratschuh, 43 Quadratzolle, und 80 Quadratlinien.

Ferners: wäre der Inhalt = 49°. 53'. 88''. 80'''Q. und die Höhe = 4°. 0'. 0''. 8'''; so ist die Grundlinie = 12°. 3'. 6''.

§. 235. Bei dem zwölfteiligen Maasse ist ein doppeltes Flächenmaas im Gebrauche. Die erste ist, wenn auf die vorhergehende Art die Seite eines ieden Quadrats in die gewöhnliche zwölf Teile, oder ist es eine Quadratklafter in sechs Teile eingeteilet wird; wo alsdenn die kleinere Einheiten oder Teile davon ebenfals Quadrate sind. Es enthält demnach eine Quadratklafter 36 Quadratschuh; ein Quadratschuh 144 Quadratzolle; ein Quadratzol 144 Quadratlinien, u. s. w. Da nun alhier nicht mehr das algemeine Maas der Zahlen beibehalten, sondern

ei-

eine andere Einteilung angenommen wird, so müssen auch die Rechnungen nach den Regeln der benanten Zahlen verrichtet werden.

Bei der Addition und Subtraktion ist blos dasjenige zu beobachten, so in der Rechenkunst von benanten Zahlen vorgeschrieben worden. Bei der Multiplikation und Division aber sind noch folgende Regeln, als die vorzüglichsten zu merken.

Nemlich bei der Multiplikation.

1. Bringet beide Faktoren auf die kleinste in einem derselben gegebenen Einheit §. 41. Rechenk.

2. Multipliciret hierauf wie gewöhnlich.

3. Bringet endlich die kleinere Einheiten des Produkts wieder auf grössere, §. 53. Rechenk. indem ihr solches nach und nach mit 144, oder wenn es Quadratschuhe sind, mit 36 dividiret, um Quadratklafter zu bekommen.

Z. B. es sei die Grundlinie eines Rechteckes $= 36^{\circ}. 4'. 8''. = 2648''$, und die Höhe $= 20^{\circ}. 3'. 6''. = 1482''$, so ist der Flächeninhalt $= 3924336''$Q. $= 757^{\circ}. 0'. 48$Q.

Bei der Division.

1. Bringet gleichfals den Dividendus so wohl als den Divisor auf die kleinste in einem derselben gegebenen Einheit; indem ihr den erstern nach dem Flächenmaasse, den andern aber nach dem Längenmaasse betrachtet.

2. Dividiret wie gewöhnlich.

3.

3. Bringet endlich den Quotienten nach den Einteilungen des Längenmaasses wieder auf die gröste Einheit.

Z. B. es sei der Inhalt eines Rechteckes = $1^{\circ}.\ 21'.\ 6''$Q. = $1182816'''$Q. und die Grundlinie = $2'.\ 0''.\ 8'''.$ = $296'''$, so ist die Höhe = $3996'''$ = $4^{\circ}.\ 3'.\ 9''.$

Bei Ausziehung der Quadratwurzel wird auf eine ähnliche Art verfahren, und wenn die gegebene Zahl ein unvolkommenes Quadrat ist, so mus man es auf diejenige Gattung von Einheit bringen, in welchem man die Wurzel zu haben wünschet.

§. 236. Die andere Art des zwölfteiligen Flächenmaasses bestehet darin, daß anstaat beider nur eine Seite des zur Einheit angenommenen Quadrats oder Quadratklafters in die gewöhnliche Schuhe, Zolle, u. s. w. eingeteilet, die andere aber unverändert gelassen wird. Die dadurch entstehende Teile, in welche das Ganze zerleget wird, sind also keine Quadrate mehr, sondern Rechtecke, so die ganze Seite des Quadratmaasses, oder eine ganze Klafter zur Höhe, zur Breite aber die Abteilungen der andern Seite, nemlich Schuhe, Zolle, Linien u. s. w. haben. Die Quadratklafter wird demnach in sechs Rechtecke eingeteilet, so eine Klafter zur Höhe, und einen Schuh zur Breite haben, welche Schuhe des Quadratklafter (Quadratklafterschuh) genennet werden. Ein solcher

cher Schuh enthält zwölf Rechtecke, so eine Klafter zur Höhe, und einen Zol zur Breite haben, **Zolle der Quadratklafter** (Quadratklafterzolle), und ein solcher Zol enthält ferner zwölf **Linien**, oder Rechtecke, so eine Klafter zur Höhe, eine Linie aber zur Breite haben u. s. w. Auf diese Art verbleibet demnach bei dem Flächenmaasse unmittelbar eben die Einteilung, wie bei dem Längenmaasse. Die Rechnung selbst, vermittelst welcher der Inhalt einer Fläche nach diesem Maasse ausgemessen und gefunden wird, heist die **Toisirrechnung** (das Toisiren, Klafterrechnung).

Weil nach der vorhergehenden Art, (so man von der gegenwärtigen durch die Benennungen **Quadratmaas**, und **Klaftermaas** füglich unterscheiden kan) die häufige Reduktionen öfters beschwerlich, und langweilig fallen, so haben die Franzosen, von welchen diese Rechnungsart herrühret, darin eine Erleichterung gesuchet, wenn sie die Teile des Quadratklafters nicht mehr als neue Quadrate, sondern vielmehr als Rechtecke ansehen, deren iedesmalige Zahl nicht grösser wird, als die gewöhnliche Einteilung des Längenmaasses mit sich bringet. Nun ist zwar nicht zu leugnen, daß dadurch in mancher Absicht besonders bei der Multiplikation, eine wirkliche Erleichterung verschaffet werde; ob aber nicht auch dagegen wieder in anderer Absicht, vorzüglich bei der Division, und Ausziehung der Wurzel, neue Beschwerlichkeiten verursachet werden, wird die bei-

derseitige Uebung am besten lehren. Da indessen diese Rechnungsart an vielen Orten, besonders bei dem Festungsbau schon algemein eingeführt ist, so stehet es nicht mehr in der freien Wilkühr, darin eine Wahl zu treffen.

§. 237. Weil die Schuhe der Quadratklafter Brüche davon sind, deren Nenner 6 ist, und sich also leicht in $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zerlegen lassen; ferner da die Zolle, die Linien desselben u. s. w. ebenfals als Brüche von der vorhergehenden grössern Einheit angesehen werden können, deren Nenner 12 ist, und sich folglich leicht in $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ zerlegen, und verwandlen lassen; die Rechnung aber mit dergleichen Brüchen sehr leicht aus dem blossen Gedächtnisse verrichtet werden kan; so bestehet das eigentliche Wesen und zugleich der Vorteil der Toisirrechnung darinnen, daß bei der Multiplikation die Abteilungen des Maasses iedesmal als Brüche der vorhergehenden Einheiten betrachtet werden, und folglich auch die Produkte davon eben dergleichen Brüche von den Produkten der vorhergehenden Einheiten sein müssen. Folglich fliessen daraus die zwo algemeine Regeln, auf welchen die ganze Toisirrechnung beruhet, nehmlich: 1 bei den ganzen, oder bei den Klaftern wird die Rechnung nach den gewöhnlichen Regeln verrichtet; 2. die kleinern Teile und Einheiten eines ieden Faktors sind entweder, $\frac{1}{2}$

oder

oder $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ u. s. w. von der vorhergehenden Einheit, oder können wenigstens in solche zerleget werden, und daher ist auch das Produkt davon entweder auch $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ u. s. f. von dem Produkte des vorhergehenden.

Das Produkt der ganzen Klafter durcheinander bleibet unverändert, und daher ist das Produkt von $8^\circ \times 4^\circ = 32^\circ$ Quad. und $4^\circ \times 1^\circ = 4^\circ$ Quad. Allein weil $1' = \frac{1}{6}$ von einer Klafter, so kan auch das Produkt von $1'$ nur $\frac{1}{6}$ von der Quadratklafter sein, und daher ist $4^\circ \times 1' = \frac{4}{6}^\circ = 4'$ vom Quadratklafter; welche Rechnung so gleich aus dem Gedächtnis gemacht wird.

Es ist demnach $1' = \frac{1}{6}$; $2' = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $3' = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $4' = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; und $5' = \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ vom Klafter.

Auf eben diese Art sind die Zolle zwölfteilige Brüche von dem Schuh; d. i. $1'' = \frac{1}{12}$, $2'' = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $3'' = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $4'' = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $5'' = \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$; $6'' = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $7'' = \frac{7}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; $8'' = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $9'' = \frac{9}{12} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $10'' = \frac{10}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; und $11'' = \frac{11}{12} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ von einem Schuh.

Eben so werden auch die Linien in Absicht auf die Zolle, und überhaupt alle nachfolgende Einheiten in Absicht auf die vorhergehende behandelt. Da demnach der ganze Vorteil und die Bequemlichkeit dieser Rechnung in der Leichtigkeit der Brüche bestehet, so giebt die Uebung selbst oft

noch mehrere Hülfsmittel in Zerlegung derselben an die Hand, wohin vornehmlich dieses gehöret, daß man den nachfolgenden als einen bequemen Bruch von irgend einem vorhergehenden ansehe. Z. B. $7'' = 6'' + 1''$. wo $1'' = \frac{1}{6}$ von den vorhergehenden $6''$. oder $11'' = \frac{1}{2}' + \frac{1}{4}' + \frac{1}{6}'$, wo wiederum $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ ist. Desgleichen wenn z. B. $2'$ vorhergegangen, und es folgen $9''$ so ist $9'' = 6'' + 3'' = \frac{1}{4}$ von $2' + \frac{1}{2}$ von $6''$ u. s. w.

Aufgabe.

§. 238. Die Multiplikation nach der Toisirrechnung zu verrichten.

Auflösung: Erster Fal. Wenn nur ein Faktor kleinere Einheiten mit sich führet.

1. Setzet die Faktoren gehörig untereinander nach §. 34. Rechenk.

2. Multipliciret zuerst die Ganzen, oder die Klafter wie gewöhnlich durcheinander, und setzet das Produkt davon in die gehörige Stelle.

3. Sehet die kleinere Einheiten des einen Faktors als Brüche an, und suchet nach §. 237. nach und nach die Produkte davon, so ihr iedesmal in ihre gehörige Stelle setzet.

4. Addiret diese einzelne Produkte zusammen, nach §. 34. Rechenk. so ist die Summe davon das gesamte Produkt.

Es

Es sei z. B. die Grundlinie eines Rechteckes $= 32^{\circ}. 5'. 7''.$ und die Höhe $= 4^{\circ}.$ so setzet:

$32^{\circ}.$	$5'.$	$7''.$		
4				
128			Produkt von $4^{\circ},$	
2			$3'$	$5'.$
1	2		$2'$	
0	2		$6''$	
0	0	4	$1''$	
$131^{\circ}.$	$4'.$	$4''.$	Summe oder Flächeninhalt.	

Ist zwischen der vorhergehenden Einheit, und der darauf folgenden kein so bequemes Verhältnis vorhanden, daß das Produkt der letztern durch einen leichten Bruch gefunden werden könte, so nimt man zwischen denselben zur Erleichterung des Gedächtnis und zum Behufe der Rechnung unterdessen wilkührlich eine solche Einheit in dem Faktor an, von welchem die nachfolgende ein bequemer Bruch wird, und suchet wie gewöhnlich das Produkt davon. Dieses zur Erleichterung blos angenommene Produkt wird zwar ebenfals in seine gehörige Stelle gesetzet, iedoch durchstrichen, damit es bei dem addiren nicht mitgezählet, und mit den wirklichen Produkten vermischet werde.

Z. B. es sei der eine Faktor = 25°. 0′. 0″. 8‴. und der andere 12°, so setzet:

25°. 0′. 0″. 8‴.
12

---

50 } .... Produkt von 12°.
25 }

8......... angenomm............ 1′.
0.... 4.... angenomm............ 4″
0.... 0.... 8.................. 8‴

300°. 0′. 8″ ganzes Produkt.

Zweiter Fal. Wenn beide Faktoren kleinere Einheiten mit sich führen.

1. Nachdem ihr die Faktoren gehörig untereinander gesetzet, so multipliciret zuerst den Multiplikandus durch die Ganzen des Multiplikators nach dem ersten Falle, als wenn der leztere keine Teile bei sich führete.

2. Hierauf sehet abermals diese Teile des Multiplikators als Brüche von dem Ganzen, oder von den vorhergehenden Einheiten an, und suchet auf eben die Art das Produkt davon.

3. Addiret endlich die einzelne Produkte zusammen, so ist ihre Summe das gesuchte ganze Produkt.

Wenn man annimt, daß der Multiplikator 1° wäre, so bliebe der andern Faktor unverändert zum Produkte. Es werden demnach die Verhältnisse der kleinern Einheiten des ersten zu 1°, und nach und nach zu den vorhergehenden Einheiten

durch

durch bequeme Brüche gesuchet, und nach Maasgebung dieser Verhältnis auch ihre Produkte von dem Multiplikandus, d. i. von dem Produkte von 1° angenommen. Z. B.

36°. 4′. 8″. } Faktoren.
20. 3. 6. }

720. . . . . Prod. der Klaft.
6. 4. . . . . 2′ } 4′
6. 4. . . . . 2′ }
2. 1. 4. 8″
18. 2. 4. 3′
3. 0. 4. 8. . . . . 6″

757°. 0′. 0″. 8‴.

Oder

423°. 5′. 9″. 6‴ } Faktoren.
48. 2. 7. 4. }

3384 } . . . . Prod. der Klaft.
1692 }
24. . . . . von 3′ } 5′
16. . . . . 2′ }
4. . . . . 6″ } 9″
2. . . . . 3″ }
0. 2. . . . . 6‴
141. 1. 11. 2. . . . . 2′
35. 1. 11. 9. 6. . . . . . 6″ } 7″
5. 5. 3. 11. 7. . . . . . 1″ }
1. 5. 9. 3. 10. 4. . 4‴

20534°. 5′. 0″. 2‴. 11⁗. 4′′′′′.

Hat der Multiplikator keine Ganze, sondern nur kleinere Einheiten, so fanget so gleich mit den

 leß-

leztern die Rechnung an, nach Maasgabe der Verhältnis, in welcher sie zu einem Ganzen stehen, wobei bisweilen einige angenommene Produkte nöhtig sind. Z. B.

```
5°. 3'. 7''
0.  5.  3
----------------
2.  4.  9.  6........Prod. von 3' }
1.  5.  2.  4..............    2' } 5'
0.  5.  1.  2.....angenom. Prod. von 1'
0.  1.  4.  9.  6................ 3''
--------------------
4°. 5'. 4''. 7'''. 6''''.
```

Haben endlich beide Faktoren keine Ganzen, und überhaupt fehlen einige Classen der vorhergehenden Einheiten, so werden doch einige Produkte davon angenommen, um die nachfolgende Einheiten als bequeme Brüche davon anzusehen, und folglich auch nach dieser Verhältnis die Produkte davon zu bekommen. Z. B.

```
0°. 0'. 8''. 4'''.
0.  0.  6.   5.
------------------
0.  0.  1.  4.  8 angen. Prod. von 1'.
0.  0.  0.  8.  4.......... 6''.
0.  0.  0.  1.  4.  8....... 1''.
0.  0.  0.  0.  5.  6.  8.. 4''' }
0.  0.  0.  0.  1.  4.  8.. 1''' } 5'''.
------------------------------
0°. 0'. 0''. 8'''. 10''''. 11'''''. 4''''''.
```

Fer-

Ferner

5°.	$3^{\prime}$.	$0^{\prime\prime}$.	$4^{\prime\prime\prime}$.			
2.	0.	0.	3.			
10						Prod. der Klaft.
1.						$3^{\prime}$.
0.	2.					$1^{\prime}$.
0.	0.	4.				$2^{\prime\prime}$.
0.	0.	0.	8.			$4^{\prime\prime\prime}$.
1.	5.	0.	1.	4.		$2^{\prime}$.
0.	2.	9.	0.	4.		$6^{\prime\prime}$.
0.	0.	5.	6.	0.	8.	$1^{\prime\prime}$.
0.	0.	1.	4.	6.	2.	$3^{\prime\prime\prime}$.
11.	$0^{\prime}$.	$2^{\prime\prime}$.	$0^{\prime\prime\prime}$.	$6^{\prime\prime\prime\prime}$.	$2^{\prime\prime\prime\prime\prime}$.	

§. 239. Wil man diese Schuhe, Zolle, Linien, u. s. w. des Quadratklafters in eigentliche Quadratschuhe, Quadratzolle, Quadratlinien u. s. w. nach der ersten Art §. 235. verwandlen, so bedenke man daß die ersten lauter Rechtecke sind, so eine Klafter zur Höhe haben, §. 236. folglich so viele Schuhe, Zolle, u. s. w. nach dem Längenmaasse in einer Klafter enthalten sind, so viele Quadratschuhe, Quadratzolle, u. s. w. werden auch in einem Schuhe, Zolle, u. s. w. des Quadratklafters enthalten sein. Demnach enthält ein Schuh des Quadratklafters $6^{\prime}$Q. ein Zol des ersten $72^{\prime\prime}$Q.; eine Linie des ersten $864^{\prime\prime\prime}$Q.; u. s. w. folglich geschiehet diese Verwandlung durch die blosse Multiplicirung

N 5 mit

mit den vorerwähnten Zahlen; und wenn im Gegenteil das eigentliche Quadratmaas in das Klaftermaas verwandlet werden sol, so darf man nur dadurch dividiren.

Z. B. es wären $64^{\circ}.\ 3'.\ 9''.\ 8'''$. vom Quadratklafter in eben so viele Quadratteile zu verwandlen, so machen solche $48249216^{''''q}$. oder auch $64^{\circ}.\ 473472^{''''q}. = 64^{\circ}.\ 22'.\ 120^{''q}$. Desgleichen, wenn $5^{\circ},\ 23',\ 95'',\ 132^{''''q}$. in Klaftermaas zu verwandlen wären, so machen sie $5^{\circ}.\ 490740^{''''q}. = 5^{\circ}.\ 3'.\ 11''.\ 3'''.\ 11''''.\ 10'''''$. vom Quadratklafter.

Vermöge dieser Verwandlung kan man auch die Toisirrechnung selbst verrichten, wenn man zuerst beide Faktoren auf gleiche Einheiten bringet, hierauf ordentlich multiplicirt, und denn das Produkt, so aus Quadratmaas bestehet, in Klaftermaas verwandelt.

Z. B. es wären die beiden Faktoren $36^{\circ}.\ 4'.\ 8''. = 2648''$. und $20^{\circ}.\ 3'.\ 6''. = 1482''$; so ist das Produkt $= 3924336^{''q}. = 757^{\circ}.\ 0'.\ 0''.\ 8'''$ vom Quadratklafter.

Oder: $8''.\ 4''' = 100'''$. und $6''.\ 5''' = 77'''$. so ist $100 \times 77 = 7700^{''''q}. = 8'''.\ 10''''.\ 11'''''.\ 4''''''$ vom Quadratklafter.

Aufgabe.

§. 240. Die Division nach der Toisirrechnung zu verrichten.

Auflösung. Erste Art: 1. Bringet sowohl den Dividendus als Divisor auf die klei-

kleineste in einer derselben gegebenen Einheit §. 41. Rechenk.

2. Verwandelt hierauf den Dividendus in das gewöhnliche Quadratmaas §. 239.

3. Dividiret alsdenn wie gewöhnlich.

4. Bringet endlich die kleinere Einheiten des Quotienten auf grössere §. 53. Rechenk.

Z. B. es sei der Inhalt eines Rechtecks = 300°. 0'. 8'' samt der Höhe = 12'' gegeben, man solle die Grundlinie dazu finden; so ist 300°. 0'. 8'' = 21608'' = 1555776''°. und 12° = 864''. alsdenn ist $\frac{21608}{864}$ = 1800 $\frac{2''}{3}$ = 25°. 0'. 0''. 8'''.

Oder: Es sei der Inhalt = 757°. 0'. 0''. 8''' = 654056''' = 565104384'''°. und die Höhe = 36°. 4'. 8'' = 31776'''. so ist die Grundlinie = 17784''' = 20°. 3'. 6''.

Zwote Art. 1. Lasset den Dividendus und Divisor unverändert.

2. Suchet nach den Regeln der Toisirrechnung, was für eine Zahl, und von welcher Einheit durch die Multiplikation mit dem Divisor ein Produkt hervor bringe, so dem Dividendus am nächsten komt.

3. Multipliciret diesen Quotienten wirklich mit dem ganzen Divisor.

4. Ziehet dieses Produkt von dem Dividendus ab.

5. Den Ueberrest dividiret von neuen, bis ihr den beständigen Quotienten gefunden habt.

Es sei das lezte Beispiel, so sezet die Zahlen folgender Gestalt:

Divisor	Dividend.	Quotient.
36°. 4'. 8''	757°. 0'. 0''. 8'''	20°. 3'. 6''.
	735. 3. 4. . . .	. . . . Pr. v. 20°.
	21. 2. 8	
	18. 2. 4.	3'
	3. 0. 4. 8	
	3. 0. 4. 8.	6''
	0	

Oder umgekehrt:

20°. 3'. 6''	757°. 0'. 0''. 8'''	36°. 4' 8''
	741.	. . . . . . Pr. v. 36°.
	16. 0. 0. 8	
	13. 4. 4.	4'.
	2. 1. 8. 8.	
	2. 1. 8. 8.	8''.
	0.	

Ferner:

0°. 5'. 3''	4°. 5'. 4''. 7'''. 6''''	5°. 3'. 7''.
	4. 2. 3.	Pr. v. 5°.
	3. 1. 7.	
	2. 7. 6.	3'.
	6. 1. 6.	
	6. 1. 6.	7''.
	0.	

Weil

Weil der Dividendus aus den einzeln Produkten des Divisors durch den Quotienten bestehet, §. 44 Rechenk. so komt alles darauf an, daß man diese einzelne Produkte, welche ebensals nach der Toisirrechnung hervorgebracht werden müssen, finde. Bei Aufsuchung des wahren Quotienten dazu mus also blos darauf gesehen werden, daß das Produkt desselben durch den Quotienten nach dieser Rechnung den Divisor nicht übersteige. Da nun hierzu einige Uebung nöhtig ist, so kan man sich anfänglich zu mehrerer Erleichterung einer ähnlichen Tafel, wie §. 52. Rechenk. bedienen, worin die Produkte des Divisors durch die Klafter, Schuhe, Zolle, u. s. w. enthalten sind; nehmlich folgender Gestalt nach dem lezten Beispiel:

1°	0° 5' 3''
2	1. 4. 6
3	2. 3. 9
4	3. 3. 0
5	4. 2. 3
6	5. 1. 6

3'	2' 7'' 6''
2	1. 9. 0
1	0. 10. 6
4	3. 6. 0
5	4. 4. 6

6''	5'' 3''' 0''''
3	2. 7. 6
2	1. 9. 0
1	0. 10. 6
4	3. 6. 0
5	4. 4. 6
7	6. 1. 6
8	7. 0. 0
9	7. 10. 6
10	8. 9. 0
11	9. 7. 6

Mehrere Vorteile geben sich durch die Uebung von selbsten, wobei man bald finden wird, daß dergleichen Produkte öfters in die Augen fallen, folg-

5. Den Ueberrest dividiret von neuen, bis ihr den beständigen Quotienten gefunden habt.

Es sei das letzte Beispiel, so setzet die Zahlen folgender Gestalt:

Divisor	Dividend.	Quotient.
36°. 4'. 8''	757°. 0'. 0''. 8'''	20°. 3'. 6''.
	735. 3. 4. . . .	. . . . Pr. v. 20°.

21. 2. 8
18. 2. 4. . . . . 3'

3. 0. 4. 8
3. 0. 4. 8. . . . . 6''

0

Oder umgekehrt:

20°. 3'. 6''	757°. 0'. 0''. 8'''	36°. 4' 8''
	741.	. . . . . . Pr. v. 36°.

16. 0. 0. 8
13. 4. 4. . . . . 4'.

2. 1. 8. 8.
2. 1. 8. 8. . . . . 8''.

0.

Ferner:

0°. 5'. 3''	4°. 5'. 4''. 7'''. 6''''	5°. 3'. 7''.

4. 2. 3. . . . . Pr. v. 5°.

3. 1. 7.
2. 7. 6. . . . . 3'.

6. 1. 6.
6. 1. 6. . . . . 7''.

0.

Weil

Weil der Dividendus aus den einzeln Produkten des Divisors durch den Quotienten bestehet, §. 44 Rechenk. so komt alles darauf an, daß man diese einzelne Produkte, welche ebenfals nach der Toisirrechnung hervorgebracht werden müssen, finde. Bei Aufsuchung des wahren Quotienten dazu mus also blos darauf gesehen werden, daß das Produkt desselben durch den Quotienten nach dieser Rechnung den Divisor nicht übersteige. Da nun hierzu einige Uebung nöhtig ist, so kan man sich anfänglich zu mehrerer Erleichterung einer ähnlichen Tafel, wie §. 52. Rechenk. bedienen, worin die Produkte des Divisors durch die Klafter, Schuhe, Zolle, u. s. w. enthalten sind; nehmlich folgender Gestalt nach dem lezten Beispiel:

1°	0° 5' 3''
2	1. 4. 6
3	2. 3. 9
4	3. 3. 0
5	4. 2. 3
6	5. 1. 6

3'	2' 7'' 6''
2	1. 9. 0
1	0. 10. 6
4	3. 6. 0
5	4. 4. 6

6''	5'' 3''' 0''''
3	2. 7. 6
2	1. 9. 0
1	0. 10. 6
4	3. 6. 0
5	4. 4. 6
7	6. 1. 6
8	7. 0. 0
9	7. 10. 6
10	8. 9. 0
11	9. 7. 6

Mehrere Vorteile geben sich durch die Uebung von selbsten, wobei man bald finden wird, daß dergleichen Produkte öfters in die Augen fallen, folg-

folglich diese volständige Tafeln selten nöhtig sein werden.

Aufgabe.

§. 241. Aus einer gegebenen Zahl nach dem Klaftermaasse die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. Erste Art: 1. Verwandelt das gegebene Klaftermaas in das gewöhnliche Quadratmaas §. 239.

2. Ziehet hieraus auf die gewöhnliche Art die Quadratwurzel.

3. Die gefundene Zahl bringet auf grössere Einheiten.

Z. B. es sei aus der Zahl $24^{\circ}.\ 1'.\ 0''.\ 6'''$. vom Quadratklafter die Wurzel zu ziehen, so sind $24^{\circ}.\ 1'.\ 0''.\ 6''' = 20886''' = 18045504'''$ Q. wovon die Wurzel $= 4248''' = 4^{\circ}.\ 5'.\ 6''$. ist.

Zwote Art. Verrichtet alle bei der Ausziehung der Wurzel vorfallende Multiplikationen unmittelbar nach den Regeln der Toisirrechnung, und verfahret übrigens wie gewöhnlich.

Z. B.

Z. B. es sei aus der vorigen Zahl die Wurzel zu ziehen, so setzet sie folgender Gestalt:

$24^{\circ}.\ 1'.\ 0''.\ 6'''\ |\ 4^{\circ}.\ 5'.\ 6''.$

16 . . . . Prod. d. $4^{\circ} \times 4^{\circ}$.

8. 1. 0. 6. Rest.

8 . . . . Divisor $4^{\circ} \times 2$

6. 4 . . . . Prod. d. $8^{\circ} \times 5'$.

4. 2 . . . . $5' \times 5'$.

7. 2. 2.

4. 10. 6. Rest

9. 4 . . . . Divisor $(4^{\circ} + 5') \times 2$.

4. 10 . . . . Prod. d. $(9^{\circ} + 4') \times 6''$.

– — 6 . . . . $6'' \times 6''$.

4. 10. 6.

0.

§. 242. Die Probe dieser Rechnungen kan auf eben die Art vorgenommen werden, wie bei den einfachen Rechnungsarten. Bei der Multiplikation insbesondere kan man noch dieses Hülfsmittel gebrauchen, daß man den einen Faktor doppelt, von dem andern aber nur die Hälfte nimt, und alsdenn aufs neue die Rechnung damit anstellet; wo man denn das vorige Produkt wieder bekommen mus.

Vier-



Vierter Abschnit.

Von den Körpern.

Erstes Hauptstück.

Von den Körpern überhaupt.

Erklärung.

§. 243.

Ein Körper, der von zwo parallelen, gleichen, und ähnlichen geraden Flächen, und eben so vielen Parallelogrammen, als iede der ersten Seiten hat, eingeschlossen
Fig. 138. & 139. ist, heist ein **Prisma**. Die zwo gleiche Flächen ABC, und FGH, oder ABCRF, und GHILN sind die Grundflächen, (Basis) so man in die **untere** und **obere** einteilen kan; und die Parallelogrammen ABFG, BCHG, und ACHF, oder ABHG, AFNG, FRLN, RCIL, und BCIH sind die **Seitenflächen**, welche zusammen genommen die **Oberfläche** (superficies) ausmachen. Die Entfernung der beiden Grundflächen voneinander, oder die senk-

senkrechte Linie DE zwischen denselben ist die Höhe des Prisma. Die Länge einer Seitenfläche FA oder GA heist auch die Seite des Prisma.

Da man sich überhaupt die Erzeugung eines Körpers durch die Bewegung einer Fläche vorstellen kan, so kan man auch sagen, daß ein Prisma entstehe, wenn sich die Fläche ABC oder ABCRF, längst einer geraden Linie AF oder AG parallel beweget.

Zusatz.

§. 244. Weil die Grundflächen des Prisma eine verschiedene Zahl von Seiten haben können, nach welchen sich auch die Anzahl der Seitenflächen richtet. §. 243. so giebt es auch eben so viele Gattungen von Prismen. Ist daher die Grundfläche ein Dreieck, so ist das Prisma dreieckigt; ist sie ein Viereck, viereckigt u. s. w. Stehen die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so ist es ein gerades, (geradstehendes) Prisma, ABCHGF, oder ABCRFNLIHG; wo nicht, so ist es ein schief, (schiefstehend) ABCEF. Sind endlich die beide Grundflächen nicht parallel, so ist es ein schief abgeschnittenes Prisma, ABCDEF. Fig. 138. 139. & 140.

Zusatz.

Fig. 142. & 140. §. 245. Sind die beide Grundflächen des Prisma ebenfals Parallelogrammen, so entstehet ein Parallelopipedum, so ebenfals wieder gerade, oder schief sein kan wie ABCDEF. Sind endlich die das Parallelopipedum einschliessende Sechsflächen lauter Quadrate, so ist es ein Würfel (Cubus) ABCD-EFGH, dessen drei Dimensionen gleich sind. Fig. 143.

Zusatz.

§. 246. Weil in einem ieden Parallelogram die gegenüber stehende Seiten nicht nur gleich sind, sondern auch parallel laufen, §. 108. und 56. so sind auch in einem Parallelopipedum die gegeneinander überstehende Flächen nicht nur gleich und ähnlich, sondern auch parallel; in einem Würfel aber sich alle sechs Quadrate einander gleich. Endlich müssen in einem ieden Prisma, folglich auch in einem Parallelopiped alle Durchschnitte, so mit der Grundfläche parallel geschehen, derselben gleich und ähnlich sein.

Erklärung.

§. 247. Wenn die beide Grundflächen anstaat geradlinigt zu sein, Zirkelflächen sind, wo alsdenn der Körper von zween gleichen und parallelen Kreisen, und einer krummen Seitenfläche eingeschlossen Fig. 144.

wird;

wird; oder wenn sich eine Zirkelfläche AB längst einer geraden Linie AC parallel beweget, so entstehet eine Walze, (Cylinder) die Linie FE, so die Mittelpunkte der beiden Grundflächen, oder parallelen Kreisflächen miteinander verbindet, heist die Achse des Cylinders, und der Abstand der beiden Grundflächen voneinander, oder eine senkrechte Linie zwischen denselben ist die Höhe davon.

Zusatz.

§. 248. Stehet die Achse auf den Grundflächen senkrecht, so ist es ein gerader, (gerade stehender) ABCD; machet sie aber damit einen schiefen Winkel, so ist es ein schiefer (schiefstehender) Cylinder; wie ABCD. In dem ersten ist die Achse auch zugleich die Höhe. §. 147. Fig. 144. Fig. 145.

Man kan sich auch vorstellen, daß ein gerader Cylinder entstehe, wenn sich ein Rechteck ABCD um eine seiner Seiten AC als um eine Achse in die Runde herum drehete. Fig. 146.

Aus der Entstehungsart des Cylinders erhellet, daß alle Durchschnitte, so mit der Grundfläche parallel geschehen, ebenfals Zirkel sein müssen, so derselben gleich sind. Geschiehet aber der Durchschnit nicht mit der Grundfläche parallel, so entstehet auch kein Zirkel, sondern vielmehr eine elliptische Fläche, wie wir an seinem Orte sehen werden.

Zusatz.

§. 249. Sind die beide Grundflächen nicht parallel, oder wenigstens nicht beide zugleich Zirkelflächen, so ist es ein **schief abgeschnittener Cylinder**, und zwar entweder nur
Fig. 147. auf einer Seite allein, wie ABDC; wo eine Grundfläche kein Zirkel ist, oder auf allen
Fig. 148. beiden Seiten wie ABDC, wo keine einen Zirkel vorstellet.

Zusatz.

§. 250. Gleichwie man eine Zirkelfläche als ein Polygon von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 120. so läst sich auch ein Cylinder als ein Prisma, dessen Grundfläche unendlich viele Seiten hat, betrachten.

Erklärung.

§. 251. Eine **Pyramide** (Spitzsäule) ist
Fig. 149. ein Körper der eine gerade Fläche ABCD zur Grundfläche hat, und auf den Seiten von eben so vielen Dreiecken ABF, BCF, u. s. w. als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen ist; welche mit ihrer Spitze in einem gemeinschaftlichen Punkt F zusammen stossen, so daher auch die Spitze der Pyramide genennet wird. Die Seiten der Grundflächen sind auch zugleich die Grundlinien der Seitenflächen, so zusammen genommen die Oberflä-

fläche ausmachen. Nach der Zahl der Seiten der Grundfläche, oder der Seitenflächen wird auch die Pyramide selbst benennet, und kan daher dreieckigt, viereckigt u. s. w. sein.

Zusatz.

§. 252. Die Linie FE, die aus der Spitze der Pyramide senkrecht auf die Grundfläche gezogen wird, ist die Höhe derselben. Fält solche auf den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist es eine gerade (geradstehende) wo nicht, wie FO eine schiefe (schief stehende) Pyramide. Fig. 149. & 150.

Zusatz.

§. 253. Wenn daher eine geradstehende Pyramide eine regelmässige Grundfläche hat, so man also auch regelmässig nennen kan, so müssen auch die Seitenflächen alle einander gleich sein; denn weil EA = EB §. 116. FE = FE, und der Winkel FEA = FEB = 90° §. 243. so ist das Dreieck AEF = BEF und AF = BF §. 33. aus eben dem Grunde ist auch CF = BF. Weil demnach in den Dreiecken AFB und BFC die drei Seiten gleich sind; so sind auch sie, oder die Seitenflächen der Pyramide einander gleich §. 35. und haben daher auch einerlei Höhe FM = FN. §. 178. N. 4. Fig. 149.

Zusatz.

Fig. 149. & 150. §. 254. Ist der obere Teil GIHLF oder IMNF hinweg geschnitten, so heisset es eine abgekürzte (abgestuzte) Pyramide, und die am Durchschnit entstandene Fläche GIHL, oder IMN wird ihrer Grundfläche ähnlich sein, wenn sie damit parallel ist.

Erklärung.

§. 255. Wenn die Grundfläche der Pyramide nicht geradlinigt, sondern eine Zirkelfläche ist, wo alsdenn auch die Oberfläche des Körpers eine einzige krumme Fläche ist, so entstehet ein Kegel (Conus) die gerade Linie von der Spitze bis zum Mittelpunkt der Grundfläche, ist die Achse, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, oder die von der ersten auf die andere gezogene senkrechte Linie ist die Höhe davon. Stehet die Achse auf der Grundfläche senkrecht, oder ist zugleich die Höhe des Kegels, so ist es ein
Fig. 151. & 152. gerader, (geradstehender) ABC; wo nicht, ein schiefer (schief stehender) Kegel DEF. Die Linie AB heist auch die Seite des Kegels.

Zusatz.

§. 256. Man kan sich auch vorstellen, daß ein gerader Kegel entstehe, wenn sich ein rechtwinkelichtes Dreieck ADC um eine ihrer senkrech-

rechten Seiten AD als um ihre Achse ganz herumdrehet.

Zusatz.

§. 257. Wird der Kegel ABC in einem Orte GF mit der Grundfläche parallel durchschnitten, so ist es ein parallel abgekürzter (abgestuzter) Kegel, und die Fläche am Durchschnitte ist eine Zirkelfläche; geschiehet aber der Durchschnit schief wie DE, so heisset er auch ein schief abgekürzter Kegel, und die am Durchschnitte entstehende Fläche ist keine Zirkelfläche mehr, sondern eine Ellipse, wie wir an seinem Orte hören werden. Fig. 153.

Zusatz.

§. 258. Gleichwie wir die Zirkelfläche als ein Polygon, und den Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten ansehen können §. 120. eben so läst sich auch ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche unendlich viele Seiten hat, betrachten.

Erklärung.

§. 259. Eine Kugel (Sphæra) ist ein Körper, der von einer krummen Fläche dergestalt eingeschlossen ist, daß alle Punkten derselben von einem innerhalb des Körpers angenom-

Fig. 154. nommenen Punkt A, so daher der **Mittelpunkt** heist, gleich weit abstehen. Oder man kan sich auch vorstellen, daß eine Kugel beschrieben wird, wenn sich eine halbe Zirkelflä-
Fig. 155. che ABC um ihren Durchmesser AB, als um eine Achse herumdrehet. Die krumme Fläche selbst, so die Kugel einschliesset, heist die **Kugelfläche** (Oberfläche der Kugel) und der Durchmesser AB, und Radius AG des halben Zirkel werden auch die **Durchmesser** und **Radius** der Kugel genant.

Zusaz.

§. 260. Es wird daher nur eine halbe Kugel entstehen, wenn sich nur der vierte Teil
Fig. 155. AGC einer Zirkelfläche um den Radius AG beweget.

Fig. 156. Ist aber die bewegte Fläche CAD ein Ausschnit einer Zirkelfläche, so wird der bei seiner Herumdrehung beschriebene Raum ABCD ein **Ausschnit** (Sector) der Kugel genent.

Fig. 157. Wird ein halber Abschnit ABC einer Zirkelfläche um die Linie AC bewegt, so beschreibet er einen **Abschnit** (Segmentum) DCB der Kugel.

Fig. 158. Ist endlich die erzeugende Fläche HAEG von zween Halbmessern und einem Bogen eingeschlossen, so wird durch ihre Bewegung um die Linie AH die **Zone** BDEG einer Kugel beschrieben.

Zusatz.

§. 261. Ueberal wo man demnach eine Kugel mit einer geraden Fläche durchschneidet, stellet der Durchschnit eine Zirkelfläche dar, davon EF, GC, oder OI die Radien sind; da aber diese Linien in der Erzeugungsfläche ACB immer kürzer werden, ie weiter sie von dem Radius GC abstehen, und dieser der gröste von allen ist §. 70. so folget, daß auch die durch verschiedene Durchschnitte der Kugel entstehende Zirkelflächen um so kleiner sein müssen, ie weiter der Durchschnit vom Mittelpunkt geschehen ist; dieienige aber, so durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind die **grösten Zirkel** derselben, und alle einander gleich. Fig. 155.

Daher komt der Unterschied der grösten und kleinern Zirkel einer Kugel, die hauptsächlich in der mathematischen Geographie in Betrachtung kommen.

Erklärung.

§. 262. Wenn mehrere Winkel, so nicht in einer Ebene liegen, mit ihrer Spitze in einem Punkte zusammen stossen, so entstehet ein **körperlicher Winkel** (Angulus solidus). Alle diese Winkel zusammen genommen, müssen iederzeit kleiner als vier rechte sein, oder weniger als 360° enthalten, weil sie sonst den

Umkreis eines ganzen Zirkels, folglich eine gerade Fläche ausmachen würden §. 24. N. 5.

Erklärung.

§. 263. Der körperliche Inhalt, oder der Inhalt eines Körpers ist die Grösse des Raumes, so er einnimt. Da ein Körper nicht anders als durch einen andern Körper ausgemessen werden kan, §. 5. so hat man zum Maasstabe des körperlichen Inhaltes einen Würfel erwählet, dessen Seite bald ein Klafter, bald ein Schuh, bald ein Zol u. s. w. ist, und daher bald **Cubikklafter**, **Cubikschuh**, **Cubikzol** u. s. w. genennet wird. Daher heisset auch das körperliche Maas das **Cubikmaas**, und der körperliche Inhalt der **Cubikinhalt**. Einen **Körper ausmessen** ist also nichts anders, als bestimmen, wie oft ein solcher zur Einheit angenommener Würfel darin enthalten ist.

Erklärung.

§. 264. **Gleiche Körper** sind, so einen gleichen Raum einnehmen, oder einerlei körperlichen Inhalt haben, wenn sie auch sonst in anderer Absicht sehr unterschieden sind. Aehnlich aber sind sie, wenn sie von einer gleichen Anzahl ähnlicher Flächen eingeschlossen werden, wie ABCIDEFG und abcidefg, wo Fig. 159.

dem-

demnach auch alle in demselben angenommene gleichnahmigte Linien proportional sind.

Aus dem Begriffe dieser Aehnlichkeit folget auch noch, 1. daß die umgränzende Flächen in einerlei Ordnung aneinander schliessen müssen, widrigenfals sie entweder nicht in gleicher Anzahl vorhanden, oder nicht ähnlich sein könten. 2. Da die gleichnahmigte Winkel der Flächen, so in den körperlichen Winkeln zusammen stossen, gleich sind, so müssen in ähnlichen Körpern auch diese gleich sein. 3. Nur Körper von einer Art und Gattung können einander ähnlich sein, wie Pyramiden den Pyramiden, und unter diesen die Dreieckigte den Dreieckigten, Viereckigte den Viereckigten u. s. w. ferners Kegeln den Kegeln, und unter diesen nur gerade den geraden, u. s. w. alle Körper aber von verschiedener Art und Gattung sind einander unähnlich, ungeachtet sie volkommen gleich sein können, wie z. B. eine dreieckigte Pyramide einer viereckigten; ein Cylinder oder Kegel einer Kugel, u. s. w. 4. Alle Würfel sowohl als alle Kugeln sind untereinander ähnlich.



Zwei-



Zweites Hauptstück.

Von den Prismen und Zylindern.

Lehrsatz.

§. 265.

Die Oberfläche eines ieden Prisma ohne den beiden Grundflächen ist gleich dem Produkte aus der Summe aller Seiten einer Fläche GIL, die das Prisma senkrecht durchschneidet, und aus der Länge einer Seite AD, BE, oder CF. Fig. 160.

Beweis: Die Oberfläche eines Prisma ohne den Grundflächen bestehet aus der Summe der Seitenflächen, welche Parallelogrammen sind, §. 243. wovon die Seiten der senkrecht durchschneidenden Fläche GI, IL, und LG als die Höhen, die Linien AD, BE, und CF aber als die Grundlinien angesehen werden können, aus deren Produkten die Inhalte dieser Parallelogrammen bestehen §. 172. Weil nun diese Grundlinien alle einander gleich sind, so ist die Summe ihrer Inhalte $\overline{GI + IL + LG} \times AD$; und folglich ist die Oberfläche eines ieden Prisma ohne den beiden

den Grundflächen gleich dem Produkte aus der Summe der Seiten einer Fläche, wovon es senkrecht durchschnitten wird, und aus der Länge der Seite des Prisma selbst.

Zusatz.

§. 266. Ist es ein gerades Prisma, so stehen die Grundflächen selbst auf den Seitenflächen senkrecht §. 244. folglich ist die Oberfläche gleich dem Produkte aus der Summe der Seiten der Grundfläche GLI oder ABC durch die Höhe AG = BI = CL. Fig. 161.

Zusatz.

§. 267. Da man einen Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 250. so ist auch die Oberfläche eines geraden Cylinders ohne seinen beiden Grundflächen gleich dem Produkte aus dem Umkreise der Grundfläche AB, durch die Höhe AC. Fig. 162.

Aufgabe.

§. 268. Die Oberfläche eines Prisma zu finden.

Auflösung: 1. Ist es ein gerades Prisma, so multipliciret den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Prisma.

2. Ist

Fig.160. 2. Ist es schief, so multipliciret den Umfang einer das Prisma senkrecht durchschneidenden Fläche GLI mit der Seite AD = BE = CF.

Oder: Berechnet iedes Parallelogram, woraus die Seitenflächen bestehen, besonders, und addiret sie zusammen.

3. Ist das Prisma schief abgeschnitten, wo also die Seitenflächen lauter Trapezien sind, so berechnet ebenfals iedes davon besonders, um ihre Summe zu bekommen.

4. Addiret endlich hiezu noch die beide Grundflächen, so bekomt ihr die gesamte Flächen des Prisma.

Aufgabe.

§. 269. Die Oberfläche eines geraden Cylinders zu finden.

Auflösung: 1. Multipliciret den Umkreis der Grundfläche durch die Höhe des Cylinders.

2. Addiret hiezu die beide Grundflächen, so ist die Summe die gesamte Oberfläche des Cylinders.

Aufgabe.

§. 270. Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen Cylinders zu finden.

Auf-

Auflösung: 1. Wenn der Cylinder nur auf einer Seiten schief abgeschnitten ist, so suchet zwischen der grösten Höhe BC, und kleinsten AD die mitlere arithmetische Proportional BF, und multipliciret damit den Umkreis der Grundfläche AB. Fig. 163.

2. Wäre der Cylinder zu beiden Seiten schief, aber nicht parallel abgeschnitten, so multipliciret ebenfals den Umkreis einer den Cylinder senkrecht durchschneidenden Fläche AB, so ein Zirkel ist, durch die mitlere arithmetische Proportional OR zwischen der grösten, und kleinsten Höhe CE und DF. Fig. 164.

3. Sind endlich die schiefe Abschnitte parallel, so multipliciret den Umkreis der den Cylinder senkrecht durchschneidenden Fläche CD durch EF oder AB. Fig. 165.

Beweis: Man ziehe in der grösten und kleinsten Höhe durch die Punkte C und D zween Durchschnitte CI und DH mit der Grundfläche parallel, so werden beide derselben gleich, §. 248. und durch den erstern wird der abgeschnittene Cylinder ergänzet, welcher nunmehro angesehen werden kan, als wenn er aus zween andern von gleicher Grundfläche bestünde, wie ABHD, und CIHD, und die Oberfläche desselben bestehet aus den Oberflächen dieser beiden Teile. Nun ist die Oberfläche des ersten ein Produkt aus dem Fig. 163.

Um-

Umkreis der Grundfläche in die Höhe BH, und des andern ein Produkt aus eben dem Umkreise durch die Höhe CH. §. 268. Weil nun durch den schrähen Abschnit die Oberfläche des leztern in zween gleiche Teile geteilet wird, so ist diese Hälfte ein Produkt aus dem Umkreis durch $\frac{CH}{2}$, d. i. wenn F der Teilungspunkte ist, durch FH. Die Oberfläche des schrähe abgeschnittenen Cylinders ist also ein Produkt aus dem Umkreise der Grundfläche durch $BH + FH = BF$. Weil nun die Unterschiede FH und CF gleich sind, so ist BF die mitlere arithmetische Proportional zwischen BH, und $BC = BF$. §. 200. Rechenk. oder $BF = \frac{AD + BC}{2}$ §. 247. Rechenk. Ist endlich der Cylinder zu beiden Seiten schief abgeschnitten, so mus man ihn ansehen, als wenn er aus zween vorhergehenden zusammen gesetzet wäre.

Lehrsaz.

§. 271. Die Oberflächen zweier Prismen, deren Seitenflächen einerlei Länge haben, verhalten sich wie die Umkreise der Flächen, so sie senkrecht durchschneiden.

Fig. 160. **Beweis:** Weil die Seitenflächen der Prismen Parallelogrammen sind, §. 243. so ver-

verhalten sie sich, wenn sie einerlei Länge, oder Grundlinie haben, wie ihre Höhen. §. 174. Nun sind diese Höhen die Seiten GI, LI, und LG der senkrecht durchschneidenden Fläche; folglich verhalten sich die Oberflächen dieser Prismen, wie diese Seiten.

Zusatz.

§. 272. Sind in zweien Prismen die Umkreise der senkrecht durchschneidenden Flächen gleich, die Längen der Seitenflächen aber ungleich, so verhalten sich die Oberflächen wie diese Längen. §. 174.

Zusatz.

§. 273. Weil die Oberfläche eines geraden Cylinders aus dem Produkte des Umkreises der Grundfläche durch die Höhe bestehet, §. 267. so verhalten sich diese Oberflächen wie die Umkreise, oder wie die Durchmesser der Grundflächen. §. 148. Wenn die Höhen gleich sind; und umgekehrt, wenn die Umkreise oder Durchmesser der Grundflächen gleich sind, wie die Höhen §. 215. Rechenk.

Aufgabe.

§. 274. Aus der gegebenen Oberfläche eines geraden Prisma oder Cylinders samt dem Umkreis der Grundfläche des ersten, und

dem Durchmesser des andern, die Höhe zu finden; und umgekehrt. Wenn die Höhe gegeben ist, den Umkreis der Grundfläche des ersten, und den Durchmesser des andern zu finden, folglich das Prisma, oder den Cylinder selbst zu machen.

Auflösung: 1. Wenn die Summe der Seiten der Grundfläche des Prisma; oder der Diameter des Cylinders gegeben ist: und zwar sei die verlangte Oberfläche des Prisma $= m$, die Summe der Seiten seiner Grundfläche $= a$, und die Höhe $= x$ so ist $m = ax$ §. 266. Daher ist $\frac{m}{a} = x$, ferner sei die verlangte Oberfläche des Cylinders $= n$, der Durchmesser seiner Grundfläche $= a$, die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $= d : p$, so ist der Umkreis der Grundfläche $= \frac{ap}{d}$; und die Höhe des Cylinders sei $= y$,

so ist $n = \frac{apy}{d}$ §. 267.

$$dn = apy,$$

und $\frac{dn}{ap} = y$.

2. Wenn die Höhe gegeben, und die Summe der Seiten der Grundfläche des Prisma, oder der Durchmesser des Cylinders zu finden

wä-

wäre; so sei die gegebene Oberfläche des Prisma $= m$, die Höhe c, und die Summe der Seiten z, so ist $m = cz$. §. 266.

$$\text{also } \frac{m}{c} = z.$$

Ferners wenn die Oberfläche des Cylinders $= n$ seine Höhe $= b$, der Durchmesser $= x$, und die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise wiederum $d:p$ ist, so ist der Umkreis der Grundfläche $= \frac{px}{d}$;

$$\text{folglich } n = \frac{bpx}{d} \text{ §. 267.}$$

$$\text{und } dn = bpx,$$

$$\text{also } \frac{dn}{bp} = x.$$

Hat man nun einmal alle diese Maassen gefunden, so ist es leicht sowohl das verlangte Prisma, als den Cylinder zu machen, der die verlangte Eigenschaft habe; nur wird bei dem Prisma auch noch erfordert, daß man die Anzahl und Grösse ieder Seite der Grundfläche entweder gegeben habe, oder selbst wilkührlich bestimme.

Aufgabe.

§. 275. Zu einem gegebenen Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, ein anderes von gleicher Höhe, und ähnlicher Grundfläche; oder zu einem gegebenen Cylinder einen

nen andern von gleicher Höhe zu finden; iedoch mit der Bedingung, daß ihre Oberflächen ein verlangtes Verhältnis zu einander haben.

Auflösung: 1. Es sei die Summe der Seiten der Grundfläche des gegebenen Prisma $= 4a$; das Verhältnis der Oberfläche des gegebenen zur gesuchten, wie $m : n$, die Summe der Seiten der Grundfläche des gesuchten $= 4x$, und die gemeinschaftliche Höhe $= c$, so ist die Oberfläche

des ersten $= 4ac$ } §. 266.
und des andern $= 4xc$ }

Nun ist nach der Bedingung der Aufgabe

$$4ac : 4xc = m : n,$$

folglich ist $4acn = 4xcm$ §. 209. Rechenk.

und also $\frac{4acn}{4cm} = x$.

2. Es sei der Durchmesser des gegebenen Cylinders $= a$, das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $d : p$; folglich der Umkreis der Grundfläche $= \frac{ap}{d}$; ferners der Durchmesser der Grundfläche des gesuchten Cylinders $= y$; und daher der Umkreis davon $= \frac{py}{d}$; die gemeinschaftliche Höhe $= b$; und endlich die Verhältnis der Oberfläche

des

des gegebenen Cylinders zu der Oberfläche des gesuchten wie m : n, so ist die Oberfläche

$$\text{des ersten} = \frac{abp}{d} \Big\} \text{ §. 267.}$$

$$\text{und des andern} = \frac{bpy}{d}.$$

Nun ist nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{abp}{d} : \frac{bpy}{d} = m : n,$$

d. i. $a : y = m : n$ §. 215. Rechenk.

folglich $an = my$. §. 209. Rechenk.

und also $\frac{an}{m} = y$.

Da man also sowohl von dem Prisma, als von dem Cylinder die zur Construktion erforderliche Maassen gefunden, so wird es leicht sein, sie nach der Bedingung zu machen.

Lehrsatz.

§. 276. **Die Oberflächen ähnlicher Prismen verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.**

Beweis: Die Oberflächen ähnlicher Prismen sind aus ähnlichen Flächen zusammen gesetzet; §. 264. ähnliche Flächen aber verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten §. 179. 201. und die gleichnahmigte Seiten derselben sind auch die

Seiten der Prismen; folglich verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Prismen gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Zusatz.

§. 277. Da die Cylinder als Prismen von unendlich vielen Seiten angesehen werden können, §. 250. so verhalten sich auch die Oberflächen ähnlicher Cylinder gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Aufgabe.

Fig. 159. §. 278. Zu einem gegebenen Prisma ABCIDEFG ein ähnliches abcidefg zu machen, so daß ihre Oberflächen in einer verlangten Verhältnis stehen.

Auflösung: Es sei die gegebene Verhältnis m : n,

so ist $m : n = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

$m : n = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$.

$m : n = \overline{CI}^2 : \overline{ci}^2$. u. s. w. §. 276.

Daher bekommen wir $\frac{n\overline{AB}^2}{m} = \overline{ab}^2$

$\frac{n\overline{BC}^2}{m} = \overline{bc}^2$

und $\frac{n\overline{CI}^2}{m} = \overline{ci}^2$ u. s. w.

folg-

folglich ist $\frac{\sqrt{n\overline{AB}^2}}{m} = ab$

$\frac{\sqrt{n\overline{BC}^2}}{m} = bc$

und $\frac{\sqrt{n\overline{CI}^2}}{m} = ci$ u. s. w.

Sind solchergestalten alle Maassen des neuen Prisma gefunden worden, so kann es auch leicht daraus beschrieben werden.

Zusatz.

§. 279. Auf die nemliche Weise kan man auch einen Cylinder beschreiben, der einem gegebenen ähnlich wird, und dessen Oberfläche ein verlangte Verhältnis zu der des andern hat.

Da die Formirung der Oberflächen verschiedener Körper von Papier oder einer andern Materie, so Neze genennet werden, in der Ausübung öfters seinen Nuzen hat, und dadurch der Einbildung zu Hülfe gekommen wird, so werden wir die Art wie dabei zu verfahren, in eben der Ordnung anzeigen, wie wir die Körper selbst abhandlen.

Wenn man demnach die Oberfläche eines geraden Prisma von einer gegebenen Grundfläche und Höhe zu beschreiben hat, so zeichnet erst die Grundfläche ABCD; verlängert die Seite AB zu beiden Seiten, und machet AP = AC, PF = CD, und BE = BD, auf diese Linien beschreibet die Recht- Fig 166.

ecke BH, AL, PI, und FR, denen ihr diejenige Höhe AI gebet, so das Prisma selbst haben sol; und endlich beschreibet auf AL die zwote Grundfläche ILON, so der ersten gleich und ähnlich sein mus. Wenn alsdenn diese Flächen so gegeneinander gebogen werden, daß PA an CA, PF an CD, BE an BD u. s. w. zu liegen komt, so werden sie das verlangte Prisma formiren. Auf eben diese Art werden auch die Netze zu den Würfeln und Parallelopipeden gezeichnet.

Fig. 167. Sol die Oberfläche eines geraden Cylinders gezeichnet werden, so beschreibet ein Rechteck ABCD, dessen Länge AC den Umkreis der Grundfläche, die Breite CD der Höhe des Cylinders gleich ist. An diesem Rechtecke beschreibet zu beiden Seiten noch die beiden Grundflächen FE, so daß sie die Länge AC und DB berühren, so wird, wenn dieses Rechteck um die zwo Zirkelflächen herumgebogen wird, der verlangte Cylinder vorgestellet.

Lehrsatz.

§. 280. Der körperliche Inhalt eines geraden Parallelopipedums ist gleich dem Produkte aus den dreien Dimensionen, der Länge, Breite, und Höhe desselben.

Fig. 168. **Beweis:** Wenn man annimt, daß die Länge AB und die Breite BC nach einerlei Maasse eingeteilet worden, so enthält das Produkt davon die Anzahl der Quadrate, so in der Grundfläche enthalten sind, §. 168. ist nun die Höhe AE gleichfals nach eben die-

sem

sem Maasse eingeteilet, so stehen auf der Grundfläche eben so viele Würfel, die eine von den Abteilungen des Maasses zur Länge, Breite und Höhe haben, als Quadrate darin enthalten sind, welche eine Schicht oder Lage derselben ausmachen. Weil nun die parallele Durchschnitte mit der Grundfläche gleich sind, so enthält das ganze Parallelopipedum so viele dergleichen Schichten, als in der Höhe AE Abteilungen enthalten sind; folglich bekomt man die Anzahl aller Würfel, wenn man die Zahl derselben in einer Schichte mit der ganzen Höhe multipliciret. Nun bestehet der körperliche Inhalt in der Anzahl der Würfel, so in dem Körper enthalten sind, §. 263. folglich ist der Inhalt eines Parallelopipedums gleich dem Produkte aus der Länge in die Breite und Höhe, oder auch aus der Grundfläche in die Höhe.

Wäre also die Länge = a, die Breite = b, und die Höhe = c, so wird der körperliche Inhalt durch abc ausgedrückt. Wäre das Parallelopipedum ein Würfel, in welchem folglich alle drei Dimensionen gleich sind, und man nennet eine davon = a, so ist der körperliche Inhalt des Würfels = a^3.

Zusatz.

§. 281. Nimt man die Abteilungen des Maasses unendlich klein an, so wird auch die

Höhe eines ieden Würfels, und folglich einer ieden Schichte unendlich klein, welche alsdenn ein Element des Körpers genent wird, deren Anzahl durch die Höhe bestimmet ist, und aus deren Produkte durcheinander der körperliche Inhalt entstehet.

Zusatz.

§. 282. Auf eben diese Art erhellet, daß in einem ieden andern geraden Prisma, der Flächeninhalt der Grundfläche die Anzahl Würfel bestimme, so auf derselben stehen, oder in einer Schichte enthalten sind, und folglich der körperliche Inhalt gefunden werde, wenn die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt wird. Also ist überhaupt der körperliche Inhalt eines ieden geraden Prisma gleich dem Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

Zusatz.

§. 283. Hieraus fliessen noch die weitere Folgerungen.

1. Weil die Würfel, so zum Maasstabe angenommen werden, selbst rechtwinkelicht sind, folglich auch die Anzahl der aufeinander liegenden Schichten nur durch eine senkrechte Linie, folglich durch die Höhe des Prisma §. 243. ausgedruckt werden kan, so bestehet auch der Inhalt eines ieden schiefen Pris-

Prisma ABCDEFGH aus dem Produkte der Grundfläche ABCD und der Höhe AL. Fig. 169.

2. Alle Prismen ABCDEFGH, und MVXTOPRS so gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen BF und NR haben, wenn auch die erstern nicht ähnlich sind, haben gleiche Cubikinhalte. Fig. 170.

3. Sind die Grundflächen zweier Prismen an Inhalte gleich, die Höhen aber ungleich; oder umgekehrt sind die Höhen gleich, und die Grundflächen ungleich, so verhalten sich ihre körperliche Inhalte im ersten Falle wie die Höhen; im andern aber wie die Grundflächen; weilen alsdenn der Unterschied ihres Cubikmaasses blos in der Ungleichheit des einen Faktors ihres Produkts bestehet.

4. Kennet man von einem Prisma den Cubikinhalt, und die Höhe, oder die Grundfläche, so kan man allezeit die unbekante Grundfläche, oder die Höhe finden; denn wenn ab die Grundfläche, und c die Höhe ist, so ist abc der Cubikinhalt; folglich im ersten Falle die gesuchte Grundfläche $= \frac{abc}{c} = ab$ und im andern die gesuchte Höhe $= \frac{abc}{ab} = c$.

Zusatz.

§. 284. Da man einen Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten ansehen kan,

Höhe eines ieden Würfels, und folglich einer ieden Schichte unendlich klein, welche alsdenn ein Element des Körpers genent wird, deren Anzahl durch die Höhe bestimmet ist, und aus deren Produkte durcheinander der körperliche Inhalt entstehet.

Zusatz.

§. 282. Auf eben diese Art erhellet, daß in einem ieden andern geraden Prisma, der Flächeninhalt der Grundfläche die Anzahl Würfel bestimme, so auf derselben stehen, oder in einer Schichte enthalten sind, und folglich der körperliche Inhalt gefunden werde, wenn die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt wird. Also ist überhaupt der körperliche Inhalt eines ieden geraden Prisma gleich dem Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

Zusatz.

§. 283. Hieraus fliessen noch die weitere Folgerungen.

1. Weil die Würfel, so zum Maasstabe angenommen werden, selbst rechtwinkelicht sind, folglich auch die Anzahl der aufeinander liegenden Schichten nur durch eine senkrechte Linie, folglich durch die Höhe des Prisma §. 243. ausgedruckt werden kan, so bestehet auch der Inhalt eines ieden schiefen

Pris-

Prisma ABCDEFGH aus dem Produkte der Fig. 169. Grundfläche ABCD und der Höhe AL.

2. Alle Prismen ABCDEFGH, und Fig. 170. MVXTOPRS so gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen BF und NR haben, wenn auch die erstern nicht ähnlich sind, haben gleiche Cubikinhalte.

3. Sind die Grundflächen zweier Prismen an Inhalte gleich, die Höhen aber ungleich; oder umgekehrt sind die Höhen gleich, und die Grundflächen ungleich, so verhalten sich ihre körperliche Inhalte im ersten Falle wie die Höhen; im andern aber wie die Grundflächen; weilen alsdenn der Unterschied ihres Cubikmaasses blos in der Ungleichheit des einen Faktors ihres Produkts bestehet.

4. Kennet man von einem Prisma den Cubikinhalt, und die Höhe, oder die Grundfläche, so kan man allezeit die unbekante Grundfläche, oder die Höhe finden; denn wenn ab die Grundfläche, und c die Höhe ist, so ist abc der Cubikinhalt; folglich im ersten Falle die gesuchte Grundfläche $= \frac{abc}{c} = ab$ und im andern die gesuchte Höhe $= \frac{abc}{ab} = c$.

Zusatz.

§. 284. Da man einen Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten ansehen kan,

kan, §. 250. so läst sich von demselben ebenfals alles dasienige, so §. 282. und 283. vom Prisma gesagt worden, erweisen;

1. Wenn demnach der Durchmesser des Cylinders $= a$, seine Höhe $= c$, und die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $= d : p$, so ist der Umkreise der Grundfläche $= \frac{ap}{d}$; der Fläche ninhalt davon $= \frac{a^2p}{4d}$ §. 210. und der körperliche Inhalt des Cylinders $= \frac{a^2pc}{4d}$.

2. Zween Cylinder, oder auch ein Prisma und ein Cylinder von gleichen Grundflächen, und ungleichen Höhen, oder auch von ungleichen Grundflächen, und gleichen Höhen, verhalten sich im ersten Falle wie ihre Höhen, und im andern wie ihre Grundflächen.

3. Ist von einem Cylinder der Durchmesser $= a$, und sein Cubikinhalt $= m$ bekant, und man sol seine Höhe x finden, so ist erstlich $\frac{a^2px}{4d} = m$,

und $a^2px = 4dm$,

folglich $x = \frac{4dm}{a^2p}$.

Wäre aber die Höhe $= c$, und der Cubikinhalt $= \frac{pcxx}{4d} = m$ gegeben, und man solte

dar-

daraus den Diameter x finden,
so ist $pcxx = 4dm$,
ferners $xx = \frac{4dm}{pc}$,

und endlich $x = \sqrt[2]{\frac{4dm}{pc}}$.

Sind übrigens Prismen oder Cylinder auszurechnen, in denen noch ein anderer Körper ausgehöhlet ist, so verstehet sich von selbsten, daß man den hohlen Teil besonders berechnen, und von dem Inhalte des Ganzen abziehen müsse. Nicht minder wäre die Grundfläche ein Ausschnit oder Abschnit einer Zirkelfläche, und folglich der Körper nur ein Teil eines Cylinders, so würde man wie gewöhnlich die Grundfläche mit der Höhe zu multipliciren haben.

Das was wir bisher von dem Cubikinhalt der Prismen und Cylindern gesagt haben, erstrecket sich eigentlich nur auf iene, deren beide Grundflächen parallel sind; wie aber der körperliche Inhalt von Prismen so diese Eigenschaft nicht haben, sondern schrähe abgeschnitten sind, zu finden sei, sol in folgendem Hauptstück gewiesen werden, weil dabei einige Begriffe von Pyramiden vorausgesetzt werden.

Aufgabe.

§. 285. Den Cubikinhalt eines schief abgeschnittenen Cylinders zu berechnen.

Auf-

Fig. 163. **Auflösung:** 1. Ist der Cylinder nur auf einer Seite schief abgeschnitten, wie ABCD, so multipliciret die Grundfläche AB durch die halbe Summe der grösten und kleinsten Höhe $\frac{AD + BC}{2}$, oder durch die mitlere arithmetische Proportional BF zwischen denselben §. 247. Rechenk.

2. Soferne er aber zu beiden Seiten schief
Fig. 171. abgeschnitten wäre, wie AIBC, so nehmet eine den Cylinder perpendikular durchschneidende Fläche DE zur Grundfläche an, und multipliciret sie ebenfals mit der halben Summe der grösten, und kleinsten Höhe, d. i. mit $\frac{FB + GC}{2}$, oder mit der mitlern arithmetischen Proportional zwischen demselben, so wird das Produkt in beiden Fällen der verlangte Cubikinhalt sein.

Fig. 163. **Beweis:** Da der schief abgeschnittene Cylinder ABCD angesehen werden kan, als ob er aus ABHD, und DHFG, der Hälfte von DHCI zusammen gesezt wäre, §. 270. so ist, wenn man die Grundfläche $= P^2$ annimt, der Inhalt des ganzen Cylinders ABCI $= P^2 \times BC$, und des kleinen ABDH $= P^2 \times AD$; folglich des Teils DHCI $= P^2 \times BC - P^2 \times AD = P^2 \times BC - AD$, und die Hälfte davon oder

DH

$DHCD = P^2 \times \frac{BC - AD}{2}$. Demnach ist der körperliche Inhalt des schief abgeschnittenen Cylinders $= P^2 \times AD + P^2 \times \frac{BC - AD}{2} = P^2 \times AD + \frac{BC - AD}{2} = P^2 \times \frac{AD + BC}{2}$.

Einen zu beiden Seiten schief abgeschnittenen Cylinder kan man aus zween nur auf einer Seiten schief abgeschnittenen zusammen gesezt ansehen, und den Beweis auf die nemliche Art machen. Uebrigens kan man von den auf verschiedene Weise schief abgeschnittenen Cylindern in des Abts Dedier science des Géometres ein mehreres finden.

Aufgabe.

§. 286. Prismen oder Cylinder in andere von gleichen Inhalte zu verwandeln, wozu entweder die Grundfläche oder die Höhe gegeben ist.

Auflösung: 1. Es sei ein Prisma, dessen Grundfläche zum Beispiele ein Dreieck $= \frac{ab}{2}$, die Höhe $= c$, und folglich der Cubikinhalt $= \frac{abc}{2}$, in ein anders, dessen Grundfläche ein Quadrat $= xx$, und die Höhe $= d$ werden sol, zu verwandeln,

so

so ist $\frac{abc}{2} = xxd$,

folglich $\frac{abc}{2d} = xx$,

und $\sqrt[2]{\frac{abc}{2d}} = x$.

2. Wäre die neue Grundfläche $= dn$, und man wolte die Höhe y finden, so ist wiederum

$$\frac{abc}{2} = dny,$$

$$\text{und } \frac{abc}{2dn} = y.$$

3. Hätte man einen Cylinder, dessen Diameter $= a$ und die Höhe $= c$ wäre, in einen andern von der Höhe $= b$ von gleichem Inhalt mit dem gegebenen zu verwandelen, und dessen Durchmesser x zu suchen, so ist, wenn man die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $= d : p$ annimt, der Inhalt des gegebenen Cylinders $= \frac{aapc}{4d}$, und des gesuchten $= \frac{xxpb}{4d}$;

folglich $\frac{aapc}{4d} = \frac{xxpb}{4d}$,

und $aac = xxb$ §. 169. Rechenk.

also

also $\frac{aac}{b} = xx$,

endlich $\sqrt{\frac{aac}{b}} = x$.

4. Wäre aber der neue Durchmesser = m gegeben, und die Höhe = y zu finden, so ist abermal $\frac{aapc}{4d} = \frac{m^2py}{4d}$,

oder kürzer $aac = m^2y$,

folglich $\frac{aac}{m^2} = y$.

Auf die nehmliche Art hätte man auch zu verfahren, wenn ein Prisma in einen Cylinder, oder umgekehrt, ein Cylinder in ein Prisma von gleichem Inhalte zu verwandeln wäre.

Lehrsatz.

§. 287. Die körperliche Inhalte ähnlicher Prismen verhalten sich gegeneinander wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten.

Beweis: Weil ähnliche Körper von ähnlichen Flächen eingeschlossen sind, §. 264. so verhalten sich nicht nur die Grundflächen ABCI und abci gegeneinander, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten, §. 276. sondern auch die gleichnahmigte Seiten dieser Flächen sind einander proportional §. 144. folglich ist $ABCI : abci = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, Fig. 159.

und AD : ad = AB : ab. Also ABCI × AD : abci × ad = $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$ §. 216. Rechenk. Nun ist ABCI × AD der körperliche Inhalt des ersten Prisma, und abci × ad des andern, §. 282. folglich verhalten sich ihre Inhalte gegeneinander wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten, und umgekehrt: ihre gleichnahmigte Seiten verhalten sich gegeneinander wie die Cubikwurzeln aus ihren Inhalten §. 217. N. 2. Rechenk.

ferner, weil $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3 = \overline{BC}^3 : \overline{bc}^3$. u. s. w. so ist auch

ABCI × AD : abci × ad = $\overline{AD}^3 : \overline{ad}^3 = \overline{BC}^3 : \overline{bc}^3$ u. s. w.

Zusatz.

§. 288. Weil schiefe Prismen den geraden gleich sind, so mit ihnen einerlei Grundfläche und Höhe haben §. 283. N. 2. so verhalten sich auch die Inhalte der ersten, wenn sie ähnlich sind, gegeneinander, wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten.

Zusatz.

§. 289. Da man einen Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 250. so verhalten sich auch die körperliche Inhalte ähnlicher Cylinder gegeneinan-

an-

ander] wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten; ihrer Durchmesser, oder Höhen.

Aufgabe.

§. 290. Zu einem gegebenen Prisma, oder einem Cylinder ein ähnliches nach einer verlangten Verhältnis zu finden.

Auflösung: Es sei die Verhältnis des gegebenen Prisma zu dem gesuchten $= m : n$; eine iede Seite des ersten $= a$ und die gleichnahmigte Seite des andern $= x$,

so ist $m : n = a^3 : x^3$, §. 287.

folglich $na^3 = mx^3$,

und $\frac{na^3}{m} = x^3$,

also $\sqrt[3]{\frac{na^3}{m}} = x$.

Wenn auf diese Art alle gleichnahmigte Seiten gesucht worden, so ist das verlangte Prisma bestimt, und gefunden.

Sol zu einem Cylinder ein anderer ähnlicher nach einer gegebenen Verhältnis gesucht werden, so wird der Durchmesser sowohl als die Höhe auf eben diese Art gefunden.

Zusatz.

§. 291. Wäre anstaat der Verhältnis der körperlichen Inhalte schon eine Seite des ge-

suchten Prisma oder Cylinders = d gegeben, so findet man die übrigen gleichnahmigten aus den Seiten a, b, c, u. s. w. des gegebenen Prisma, wenn man setzet:

$$a : d = b : y,$$

und $a : d = c : z$ u. s. w.

folglich $\frac{db}{a} = y$,

und $\frac{dc}{a} = z$.

In dieser Aufgabe bestehet eigentlich die bei den alten Mathematikern so berühmte Delische Aufgabe, wodurch die Verdoplung des Würfels, oder die Vermehrung, und Verminderung eines Körpers nach einer ieden gegebenen Verhältnis gesuchet wurde, und welche ohne Rechnung durch blosse geometrische Zeichnung sehr schwer und mühesam aufzulösen ist.



Drittes Hauptstück.

Von den Pyramiden und Kegeln.

Lehrsatz.

§. 292.

Die Oberfläche einer regelmässigen Pyramide ABCDEFH ohne ihrer Grund- Fig. 172. fläche ist gleich dem Produkte aus der Summe aller Seiten der Grundfläche, und der halben Perpendikular HG, die aus der Spitze H auf die Grundlinie AF einer Seitenfläche gezogen wird.

Beweis: Die Oberfläche einer regelmässigen Pyramide bestehet aus lauter Dreiecken, deren Grundlinien die Seiten der Grundfläche sind, und die alle einerlei Höhe HG haben. §. 253. Der Inhalt einer Seitenfläche aber ist gleich dem Produkte aus ihrer Grundlinie und halben Höhe HG §. 178. und weil sie diese gemein haben, so ist ihr gesamter Inhalt gleich dem Produkte aus der Summe ihrer Grundlinien, durch die halbe Höhe HG.

Zusatz.

Fig. 173. §. 293. Ein gerader Kegel ABC kan als eine regelmässige Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen angesehen werden, §. 258. der Umkreis des Zirkels derselben wird die Summe der Seiten der Grundfläche der Pyramide, und die Seite AC des Kegels die Höhe aller Dreiecken, woraus die Seitenflächen bestehen, vorstellen. Folglich ist auch die Oberfläche eines geraden Kegels ABC gleich dem Produkte aus dem Umkreise der Grundfläche, und der halben Seite; d. i. $\frac{AC}{2}$.

Zusatz.

§. 294. Weil nun die Oberfläche einer regelmässigen Pyramide aus Dreiecken von gleicher Höhe, die sich nach §. 178. wie ihre Grundlinien verhalten, bestehet, so müssen sich die Oberflächen zwoer regelmässigen Pyramiden wie die Summen der Seiten ihrer Grundflächen verhalten. Da man ferners den Umkreis der Grundfläche eines geraden Kegels als die Summe der Seiten der Grundfläche ansehen kan, §. 293. so müssen sich auch die Oberflächen zweener geraden Kegeln wie die Umkreise ihrer Grundflächen verhalten.

Auf-

Aufgabe.

§. 295. Die Oberfläche einer Pyramide, oder eines Kegels zu berechnen.

Auflösung: 1. Ist die Pyramide regelmässig, oder der Kegel gerade, so multipliciret die Summe der Seiten der Grundfläche der Pyramide, oder den Umkreis des Kegels durch die halbe Höhe der Seitenfläche, so ist das Produkt die Oberfläche ohne der Grundfläche §. 292. und 294.

2. Stehet aber die Pyramide schief, so ist klar, daß ihre Seitenflächen nicht einerlei Höhe haben können; derowegen muß man die Höhe einer ieden insbesondere messen, ihre Grundlinie mit der halben Höhe multipliciren, und die besondere Produkte alsdenn zusammen addiren.

Die Berechnung der Oberfläche eines schiefen Kegels sowohl, als eines schiefen Cylinders hänget von höhern Gründen ab, so wir alhier nicht berühren können.

3. Ist die Spitze einer ~~geraden~~ Pyramide mit der Grundfläche parallel abgeschnitten, so bestehet die Oberfläche der abgekürzten Pyramide ohne den beiden Grundflächen aus lauter Trapezien ABFD, deren Seiten AB und DF parallel sind, und einerlei Höhe MN haben. Nun aber ist der Inhalt eines solchen Fig. 17.

Trapeziums $= \frac{AB + DF}{2} \times MN$ §. 198. derowegen um die gesamte Inhalte dieser Trapezien, oder der ganzen Oberfläche der abgekürzten Pyramide zu bekommen, mus man die halbe Summe der Seiten der beiden Grundflächen mit der Höhe eines solchen Trapeziums multipliciren.

Fig. 175. 4. Hätte man die Oberfläche eines mit der Grundfläche parallel abgestuzten geraden Kegels ABEF zu berechnen, so betrachtet, daß dieselbe ebenfals aus lauter Trapezien bestehet, deren parallele Seiten aber unendlich klein, und ihre Summen eigentlich die Umkreise der beiden Grundflächen sind; derowegen mus man ebenfals diese halbe Summe der Umkreise mit der Seite AE oder BF multipliciren.

Aufgabe.

§. 296. Eine regelmässige Pyramide, oder einen geraden Kegel von einer verlangten Oberfläche zu beschreiben, wozu die Summe der Seiten der Grundfläche der ersten, oder der Diameter des andern gegeben ist, und folglich die Höhe der Seitenflächen zu finden.

Auflösung: 1. Man setze, daß die Grundfläche der Pyramide ein Rechteck werden solle, davon eine Seite = a, und die andere = b

ist,

ist, so ist die Summe der Seiten $= 2a + 2b$; ferners sei der gegebene Inhalt der Oberfläche $= m$, und die gesuchte Höhe der Seitenfläche $= x$, so ist nach §. 292.

$$(2a + 2b) \times \frac{x}{2} = m,$$

oder $\frac{2ax + 2bx}{2} = m$,

und $2ax + 2bx = 2m$,

folglich $x = \frac{2m}{2a + 2b}$.

2. Es sei der Durchmesser der Grundfläche des geraden Kegels $= a$; die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise $= d : p$; die gegebene Oberfläche $= n$, und die gesuchte Seite des Kegels $= x$, so ist nach §. 293.

$$\frac{ap}{d} \times \frac{x}{2} = n,$$

oder $\frac{apx}{2d} = n$,

folglich $x = \frac{2dn}{ap}$.

Aufgabe.

§. 297. Zu einer gegebenen geraden Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Sechseck ist, eine andere von ähnlicher Grundfläche und gleicher Höhe der Seitenflächen;

 oder

oder zu einem Kegel einen andern von gleicher Seite, und zwar mit der Bedingung zu finden, daß ihre Oberflächen in einer verlangten Verhältnis stehen sollen.

Auflösung: Da man im ersten Falle eine Seite der sechseckigten Grundfläche, im andern aber den Durchmesser des Kegels zu suchen hat, so sei

1. Eine Seite der Grundfläche der gegebenen Pyramide $= a$, so ist die Summe derselben $= 6a$; die Seite der neuen Grundfläche $= x$, so wird ihre Summe $= 6x$ die gemeine Höhe der Seitenflächen beider Pyramiden sei $= b$, und ihre Oberflächen sollen sich wie $m : n$ verhalten.

Demnach ist die Oberfläche der gegebenen Pyramide $= \frac{6ab}{2}$, und der gesuchten $= \frac{6xb}{2}$ §. 292. und vermög der Bedingung der Aufgabe ist: $m : n = \frac{6ab}{2} : \frac{6xb}{2} = a : x$,

folglich $\frac{an}{m} = x$.

2. Es sei der Durchmesser der Grundfläche des gegebenen Kegels $= a$, und des gesuchten $= y$, so ist der Umkreis des ersten $= \frac{ap}{d}$, und des andern $= \frac{py}{d}$; wenn nun die

Sei-

Seite beider Kegel = b, und die Verhältnis ihrer Oberflächen = m : n angenommen wird, so ist die Oberfläche des gegebenen = $\frac{abp}{d}$, und des gesuchten = $\frac{bpy}{d}$ §. 293.

folglich ist $m : n = \frac{abp}{d} : \frac{bpy}{d} = a : y$,

und $\frac{an}{m} = y$.

Lehrsatz.

§. 298. Die Oberflächen ähnlicher Pyramiden und Kegeln verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Beweis: Die Oberflächen ähnlicher Pyramiden und Kegeln sind aus ähnlichen Flächen zusammen gesezt, §. 264. ähnliche Flächen aber verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten §. 201. folglich verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Pyramiden sowohl als Kegeln wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten.

Aufgabe.

§. 299. Zu einer gegebenen Pyramide ABCDEFH eine ähnliche abcdefh nach einer Fig. 172.

ner

ner gegebenen Verhältnis der Oberflächen zu finden.

Auflösung: Es sei die Oberfläche der gegebenen Pyramide zu der Oberfläche der gesuchten wie m : n, so ist

$$m : n = \overline{AF}^2 : \overline{af}^2, \text{ §. 298.}$$

folglich $\frac{n\overline{AF}^2}{m} = \overline{af}^2$,

und $\sqrt{\frac{n\overline{AF}^2}{m}} = af.$

Auf eben diese Art können nun alle übrige gleichnahmigte Linien der Grund und Seitenflächen sowohl als die Pyramide selbst gefunden werden, es mag solche regelmässig sein oder nicht.

Zusatz.

§. 300. Eben so kan man einen Kegel finden, der mit einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Oberfläche zu der Oberfläche desselben in einer verlangten Verhältnis stehen sol.

Um das Netz zu einer regelmässigen Pyramide zu verfertigen, beschreibet erstlich die Grundfläche
Fig. 176. BCDEF; auf einer Seite BC derselben errichtet aus der Mitte die Perpendikular AO, die ihr der Höhe einer Seitenfläche gleich machet; denn ziehet aus A mit dem Radius AB den unbestimten Zirkelbogen GBCL, und traget die Seiten der Grundfläche als Sehnen darauf; endlich ziehet aus den Punkten der Sehnen nach A gerade Linien.

Wä-

Wäre aber die Grundfläche kein regelmässiges Vieleck, oder stünde die Pyramide überhaupt schief, so müssen die Seitenflächen, deren Höhen alsdenn nicht überal gleich sind, besonders gezeichnet, und hernach in ihrer Ordnung zusammen gesetzet werden.

Wolte man die Oberfläche eines Kegels zeichnen, so beschreibet mit dem Radius OD die Grundfläche desselben; aus O ziehet die Linie AO, so daß CA der Seite des Kegels gleich wird; aus A ziehet mit einem Radius AC den Zirkelbogen DCB den ihr dem Umkreise der Grundfläche gleich machet, endlich ziehet die Linien AD, und AB so ist ABCD die verlangte Oberfläche des Kegels. Fig. 177.

Solte die Oberfläche von einem abgekürzten Kegel vorgestellet werden, so verfahret zuerst in allen wie gleich gesagt worden, hierauf traget die Seite des Kegels aus B in F, und mit dem Radius AF beschreibet aus A den Bogen FL, der dem Umkreise der kleinern Grundfläche des abgestuzten Kegels gleich ist. Nimt man nun den Teil ALF hinweg, und beschreibet die kleinere Grundfläche IN selbst, so daß DL zu ihr eine Tangent wird, so ist DLFBC die verlangte Oberfläche.

Auf eine ähnliche Art würde man zu verfahren haben, wenn man eine abgekürzte Pyramide zu machen hätte.

Lehrsatz.

§. 301. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander an Cubikinhalt gleich.

Vorbereitung: Wenn man sich vorstellet, daß eine Pyramide aus lauter Flächen, deren Dicke unendlich klein ist, oder aus Elementen zusammen gesetzet sei, §. 281. so können die mit der Grundfläche parallel geschehene Durchschnitte GHL, und IMR dafür an- Fig. 178. gesehen werden, von welchen die Grundfläche selbst das gröste Element, das lezte aber an der Spitze N unendlich klein, oder = 0 ist, aus der Summe dieser Elementen oder Durchschnitten wird daher auch der körperliche Inhalt der Pyramide bestehen. Um demnach zu erweisen, daß zwo Pyramiden von gleichen Grundflächen ABE und CDF, und Höhe NP einander auch an Cubikinhalt gleich sind, so müssen wir erweisen, 1. daß alle aufeinander liegende Elemente ihrem grösten Elemente oder der Grundfläche ähnlich sind. 2. Daß in beiden Pyramiden die Elemente oder parallele Durchschnitte mit der Grundfläche, so in gleicher Höhe von der leztern liegen, wie GHL und IRM einander gleich sind. 3. Daß endlich die Summen der Elementen in beiden Pyramiden ebenfals gleich sind.

Beweis: 1. Da die Fläche GHL parallel mit ABE ist, so sind es auch die Seiten GL und AE; GH und AB, LH und EB; folglich sind die Dreiecke AEN, EBN, und ABN mit ihren Grundlinien durch GL, EB, und

AB

AB parallel durchschnitten worden, woraus folgende Proportionen nach §. 128. und 129. fliessen:

$$AN : GN = AB : GH$$
$$AN : GN = AE : GL$$
$$BN : HN = AB : GH$$
$$BN : HN = BE : HL$$

derowegen ist $AB : GH = AE : GL$

und $AB : GH = BE : HL$

folglich auch $AE : GE = BE : HL$.

§. 204. Rechenk. d. i. die gleichnahmigte Seiten der Dreiecke ABE, und GHL sind in Proportion, und sie also selbst einander ähnlich. §. 141. Nach eben diesen Gründen ist auch CDF ∽ IRM.

2. Da die Dreiecke AND, ANB, und CND durch eine Linie GR mit ihren Grundlinien parallel durchschnitten werden, so ist nach §. 130.

$$AD : GR = AB : GH$$
$$AD : GR = CD : IR$$

folglich $AB : GH = CD : IR$

und endlich $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{IR}^2$.

§. 217. Rechenk. Da nun ähnliche Flächen sich zu einander wie die Quadrate ihre gleichnahmigten Seiten verhalten §. 201. so ist:

$$\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2 = ABE : GHL$$

und $\overline{CD}^2 : \overline{IR}^2 = CDF : IRM$

also ist auch $ABE : GHL = CDF : IRM$.

§. 204.

§. 204. Rechenk. Da nun in dieser lezten Proportion die vordere Glieder nach der Bedingung gleich sind, so müssen es auch die hintern sein §. 206. Rechenk. Folglich sind die Elemente GLH und IRM einander gleich.

3. Da nun in beiden Pyramiden die Höhen gleich sind, durch die Höhen aber die Anzahl der Elementen ausgedruckt wird, so sind auch in beiden die Summen der Elementen, d. i. ihre körperliche Inhalte gleich. Folglich sind Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen an Cubikinhalte gleich.

Obgleich in der Figur nur dreieckigte Pyramiden vorgestellet worden, so ist doch der Saz sowohl als der Beweis algemein, und gilt nicht nur von allen übrigen Pyramiden, die einerlei Vielecke, sondern auch von solchen, so ganz verschiedene Vielecke, wenn sie nur an Flächeninhalt gleich sind, zur Grundfläche haben.

Zusaz.

§. 302. Da man einen Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 258. so müssen auch zween Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen, sowohl als ein Kegel und eine Pyramide von dieser Eigenschaft gleiche Cubikinhalte haben.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 303. Der körperliche Inhalt einer dreieckigten Pyramide ist der dritte Teil eines dreieckigten Prisma, daß mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis: Wenn man ein dreieckigt Prisma ABCDEF nach den Flächen DFC, und DCB durchschneidet, so wird dasselbe in drei Pyramiden CDEF, ABDC und BDFC zerteilet, wovon die zwo ersten am Inhalte einander gleich sind, §. 301. siehet man ferners ABD als die Grundfläche der Pyramide ABDC, und BDF als die Grundfläche der Pyramide BDFC, CI aber als ihre gemeinschaftliche Höhe an, so ist auch die Pyramide ABDC = BDFC; weil abermal ihre Grundflächen, und Höhen einander gleich sind. §. 301. Fig. 179.

Derowegen da ABDC = CDEF
ABDC = BDFC
so ist auch CDEF = BDFC

folglich sind die drei Pyramiden, worin das Prisma zerteilet worden, einander gleich, oder eine iede derselben ist der dritte Teil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche.

Zusatz.

§. 304. Weil man eine iede Pyramide, was sie auch immer für ein Polygon zur

Grundfläche hat, in mehrere dreieckigte zerteilen kan, deren iede nach vorigem Lehrsatz der dritte Teil eines dreieckigten Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist; so ist auch eine Pyramide von was immer für einer Grundfläche nur der dritte Teil eines Prisma, so mit derselben gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Hieraus kan nun auch der §. 301. vorgetragene Lehrsatz als eine unmittelbare Folge hergeleitet werden. Denn weil alle Prismen, so gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich sind, §. 283. N. 2. so müssen auch die Pyramiden, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind, als Drittel davon auch einander gleich sein.

Zusatz.

§. 305. Der Inhalt eines Prisma bestehet aus dem Produkte der Grundfläche durch die ganze Höhe, §. 280. der körperliche Inhalt einer Pyramide ist aber nur der dritte Teil davon, §. 303. und 304. folglich bestehet der Inhalt einer Pyramide aus dem Produkt ihrer Grundfläche durch den dritten Teil ihrer Höhe.

Zusatz.

§. 306. Da man einen Cylinder als ein Prisma, und einen Kegel als eine Pyramide, deren Grundflächen unendlich viele Seiten haben,

ben, ansehen kan, §. 250. und 258. die Pyramide aber nur der dritte Teil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist, so ist auch ein Kegel nur der dritte Teil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche. Da ferners der Inhalt eines Cylinders aus dem Produkt seiner Grundfläche durch die ganze Höhe bestehet, §. 284. so mus auch der Inhalt eines Kegels aus dem Produkte seiner Grundfläche durch den dritten Teil seiner Höhe bestehen.

Zusaz.

§. 307. Da sich Prismen und Cylinder, die gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen, und wenn leztere gleich, wie die erstere verhalten, §. 283. und 284. die Pyramiden und Kegeln aber nur Drittel von ienen sind, so müssen auch sie sich auf die nehmliche Art zu einander verhalten. §. 215. Rechenk.

Zusaz.

§. 308. Ist von einer Pyramide oder Kegel der Cubikinhalt, und die Höhe, oder anstaat dieser die Grundfläche bekant, so kan man allezeit die unbekante Grundfläche oder Höhe finden, wenn man den Cubikinhalt durch den bekanten Faktor dividiret.

Grundfläche hat, in mehrere dreieckigte zerteilen kan, deren iede nach vorigem Lehrsatz der dritte Teil eines dreieckigten Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist; so ist auch eine Pyramide von was immer für einer Grundfläche nur der dritte Teil eines Prisma, so mit derselben gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Hieraus kan nun auch der §. 301. vorgetragene Lehrsatz als eine unmittelbare Folge hergeleitet werden. Denn weil alle Prismen, so gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich sind, §. 283. N. 2. so müssen auch die Pyramiden, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind, als Drittel davon auch einander gleich sein.

Zusatz.

§. 305. Der Inhalt eines Prisma bestehet aus dem Produkte der Grundfläche durch die ganze Höhe, §. 280. der körperliche Inhalt einer Pyramide ist aber nur der dritte Teil davon, §. 303. und 304. folglich bestehet der Inhalt einer Pyramide aus dem Produkt ihrer Grundfläche durch den dritten Teil ihrer Höhe.

Zusatz.

§. 306. Da man einen Cylinder als ein Prisma, und einen Kegel als eine Pyramide, deren Grundflächen unendlich viele Seiten haben,

ben, ansehen kan, §. 250. und 258. die Pyramide aber nur der dritte Teil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist, so ist auch ein Kegel nur der dritte Teil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche. Da ferners der Inhalt eines Cylinders aus dem Produkt seiner Grundfläche durch die ganze Höhe bestehet, §. 284. so mus auch der Inhalt eines Kegels aus dem Produkte seiner Grundfläche durch den dritten Teil seiner Höhe bestehen.

Zusatz.

§. 307. Da sich Prismen und Cylinder, die gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen, und wenn leztere gleich, wie die erstere verhalten, §. 283. und 284. die Pyramiden und Kegeln aber nur Drittel von ienen sind, so müssen auch sie sich auf die nehmliche Art zu einander verhalten. §. 215. Rechenk.

Zusatz.

§. 308. Ist von einer Pyramide oder Kegel der Cubikinhalt, und die Höhe, oder anstaat dieser die Grundfläche bekant, so kan man allezeit die unbekante Grundfläche oder Höhe finden, wenn man den Cubikinhalt durch den bekanten Faktor dividiret.

Aufgabe.

§. 309. Pyramiden und Kegeln in Prismen und Cylinder, oder auch in andere Pyramiden und Kegeln von gleichem Inhalte zu verwandeln, wozu entweder die Grundfläche, oder die Höhe gegeben ist.

Auflösung: Man setze, es sei die Grundfläche einer Pyramide $= ab$, und ihre Höhe $= c$; so ist ihr Cubikinhalt $= \frac{abc}{3}$; solte sie nun in ein Prisma von gleichem Inhalte verwandelt werden, dessen Höhe $= d$ und die Grundfläche ein Quadrat sei, wovon also die Seite $= x$ zu suchen ist:

so ist $\frac{abc}{3} = xxd$,

$\frac{abc}{3d} = xx$,

folglich $\sqrt{\frac{abc}{3d}} = x$.

2. Solte man einen Kegel, dessen Durchmesser der Grundfläche $= a$, folglich die Grundfläche selbst $= \frac{a^2p}{4d}$; die Höhe $= n$, folglich der Cubikinhalt $= \frac{a^2pn}{12d}$ gegeben wäre, in einen Cylinder von gleicher Höhe und In-

Inhalte verwandeln, und also den Durchmesser $= y$ derselben suchen, so ist der Inhalt des Cylinders $= \frac{npy^2}{4d}$, und wir können setzen:

$$\frac{a^2pn}{12d} = \frac{npy^2}{4d}$$

und also $\frac{a^2}{3} = y^2$,

folglich $\sqrt{\frac{a^2}{3}} = y$.

3. Solte man eine Pyramide, deren Höhe $= f$, und der Cubikinhalt $= \frac{abf}{3}$ ist, in eine andere von gleicher Höhe und Inhalt, davon die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck sein sol, verwandeln, und folglich eine Seite desselben, die wir x, und die aus dem Mittelpunkt auf dieselbe gezogene Perpendikular y nennen wollen, finden müssen, so ist die Grundfläche der neuen Pyramide $= \frac{6xy}{2}$ $= 3xy$ §. 194. und ihr Cubikinhalt $= \frac{3xyf}{3} = xyf$, also ist $\frac{abf}{3} = xyf$ nach der Bedingung, und folglich $ab = 3\,xy =$ der neuen Grundfläche. Um nun die Seite x zu finden, so nehmen wir eine Seite $= m$ eines

regelmässigen Sechsecks wilkührlich an, berechnen die Perpendikular n die aus dem Mittelpunkt auf eine Seite gezogen ist, nach §. 183. und auch den Flächeninhalt = 3mn §. 194. Da nun dieses angenommene Sechseck der neuen Grundfläche ähnlich ist §. 138. und wir anstaat derselben ihren gleichen Wehrt ab setzen können, so ist

$$3mn : ab = m^2 : x^2 \text{ §. 201.}$$

$$\text{und } \frac{abm^2}{3mn} = \frac{abm}{3n} = x^2$$

$$\text{also } \sqrt{\frac{abm}{3n}} = x.$$

Auf eine ähnliche Weise kan man eine Pyramide in einen Kegel oder Cylinder von gleichem Inhalte verwandeln.

Lehrsatz.

Fig. 180. §. 310. Der körperliche Inhalt eines an einem Ende schief abgeschnittenen dreieckigten Prisma ABCFGE ist gleich dem Produkte aus ihrer Grundfläche ABC und dem dritten Teil der Summe der drei Seiten AF, CE und BG.

Beweis: Wenn man das schief abgeschnittene Prisma ABCFGE nach der Fläche ABE durchschneidet, so entstehet daraus die dreieckigte Pyramide EACB, und die viereckigte AFGBE, wo die Grundfläche der ersten ABC, und der andern AFGB ist, ihre

Spi-

Spitzen aber in E zusammen kommen; derowegen ist die Höhe der ersten CE, der andern aber gleich der Linie CD, weil ED parallel zur Fläche AFGB ist. Berechnen wir nun diese Pyramiden nach §. 305. so ist die Summe ihrer Inhalte der Inhalt des schiefen Prisma; d. i. wenn wir der Kürze wegen AB $= a$ CD $= b$, CE $= c$, AF $= d$, BG $= e$ nennen, so ist der Inhalt der ersten $= \frac{ab}{2} \times \frac{c}{3} = \frac{abc}{6}$ und der andern $= \frac{d+e}{2} \times a \times \frac{b}{3} = \frac{abd}{6} + \frac{abe}{6}$ und folglich der Inhalt des ganzen Prisma $\frac{abc}{6} + \frac{abd}{6} + \frac{abe}{6} =$

$$\frac{abc + abd + abe}{6} = \frac{ab}{2} \times \left(\frac{c + d + e}{3}\right)$$

d. i. dem Produkte der Grundfläche durch den dritten Teil der drei Seiten.

Zusatz.

§. 311. Es erhellet hieraus, daß der körperliche Inhalt eines an beiden Enden schief abgeschnittenen Prisma DFEHIR gleich sein müsse dem Produkte, welches entstehet, wenn man eine Fläche wie ABC, die das Prisma perpendikular durchschneidet, durch den dritten Teile der Summe der Seiten HD, EI und FR multiplicirt, weil man dieses Prisma als aus zweien vorhergehenden, die nur Fig. 181.

auf einer Seite schief abgeschnitten sind, und deren gemeine Grundfläche ABC vorstellet, zusammen gesezt ansehen kan.

Wiewohl sich die Wahrheit dieses Satzes nur eigentlich auf dreieckigte Prismen erstrecket, so läst sich derselbe doch in gewisser Maasse auch auf die übrige anwenden, nehmlich wenn man sie aus mehrern dreieckigten zusammen gesetzet betrachtet. Die Anfänger haben sich derselben, und die Art schreg abgeschnittene Prismen zu berechnen um so besser zu merken, als sie in der Ausübung, sonderlich bei Berechnung unregelmässiger Erdhauffen, die man als eine Anzahl solcher Prismen ansiehet, deren Grundflächen man durch Aufnehmen, die Höhen aber durch das Nivelliren bestimmet, von grossen Nutzen ist.

Lehrsatz.

§. 312. Die körperliche Inhalte ähnlicher Pyramiden verhalten sich gegeneinander wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten.

Fig. 172. Beweis: Weil ähnliche Pyramiden durch ähnliche Flächen eingeschlossen werden §. 264. und die gleichnahmigte Linien darin proportional sind; ferners auch ähnliche Flächen sich zu einander, wie die Quadrate der gleichnahmigten Seiten verhalten §. 201. so ist:

$$ABCDEF : abcdef = \overline{AF}^2 : \overline{af}^2$$
$$HO : ho = AF : af$$

und

$$\text{und } \frac{HO}{3} : \frac{ho}{3} = AF : af,$$

so ist $ABCDEF \times \frac{HO}{3} : abcdef \times \frac{ho}{3} = \overline{AF}^3 : \overline{af}^3$. §. 216. Rechenk.

Das erste Glied dieser Proportion aber drücket den körperlichen Inhalt der einen Pyramide, und das zweite Glied den Inhalt der andern aus, und die lezten zwei Glieder sind die Cubi der gleichnahmigten Seiten; folglich verhalten sich die Cubikinhalte ähnlicher Pyramiden wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten.

Und umgekehrt: ihre gleichnahmigte Seiten verhalten sich gegeneinander wie die Cubikwurzeln aus ihren Inhalten. §. 217. N. 2. Rechenk.

Zusatz.

§. 313. Da man einen Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen kan, so verhalten sich auch die körperliche Inhalte ähnlicher Kegeln, wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten.

Aufgabe.

§. 314. Zu einer gegebenen Pyramide, oder Kegel einen ähnlichen Körper nach einer verlangten Verhältnis zu finden.

Auflösung: Es sei die Verhältnis der gegebenen Pyramide zu der gesuchten = m : n; eine iede Seite der ersten = a, und die verlangte gleichnahmigte Seite der andern = x;

so ist $m : n = a^3 : x^3$ §. 312.

folglich $na^3 = mx^3$,

und $\frac{na^3}{m} = x^3$,

also $\sqrt[3]{\frac{na^3}{m}} = x$.

Wenn man solgergestalt die Seiten, und die Höhe der neuen ähnlichen Pyramide gefunden, so ist es leicht sie zu beschreiben.

Eben so wird auch verfahren, wenn man zu einem gegebenen Kegel einen andern ähnlichen nach einer verlangten Verhältnis suchet, und dazu sowohl den Durchmesser der Grundfläche, als auch die Höhe finden sol.

Aufgabe.

§. 315. Den körperlichen Inhalt einer regelmässigen und mit der Grundfläche parallel abgeschnittenen Pyramide AGHDFL zu finden.

Fig. 182. Auflösung: 1. Durch die Mittelpunkte E und B der kleinern, und grössern Grundfläche ziehet die Linie BE, so senkrecht darauf stehet, und ein Teil der Achse ist. §. 252. und 253.

2.

2. Ziehet auf beiden Grundflächen, so einander ähnlich sind, §. 301. die zwo gleichnahmigte Linien AB und DE, wie auch DC mit EB parallel, so ist DC = EB, §. 56. oder die Höhe der abgekürzten Pyramide; ferners ist DE = CB, und AC der Unterschied der beiden Linien AB und DE, welche insgesamt gemessen werden können.

3. Verlängert hierauf die Linien BE und AD bis zu ihrem Durchschnit in I, um die Höhe BI der ganzen Pyramide IAGH zu bekommen. Weil nun die Dreiecke ADC und AIB einander ähnlich, §. 140. N: 2. so ist AC : DC = AB : IB; folglich $\frac{AB \times DC}{AC} =$ IB, und IB — EB = IE.

4. Multipliciret hierauf die grössere Grundfläche AHG, durch den dritten Teil der ganzen Höhe IB, so habt ihr den Inhalt der ganzen Pyramide §. 305.

5. Desgleichen multipliciret die kleinere Grundfläche DLF durch den dritten Teil von IE, um den Inhalt der kleinern Pyramide, oder des abgeschnittenen Stückes IDFL zu bekommen.

6. Ziehet dieses leztere Produkt von dem ersten ab, so ist der Ueberrest der Inhalt der abgekürzten Pyramide.

Zu-

Zusatz.

Fig. 183. §. 316. 1. Eben die Berechnung gilt auch von geraden abgekürzten Kegeln, wo die gleichnahmigte Linien der Grundflächen AB und DE die Halbmesser dieser Zirkeln werden.

2. Weil alle Pyramiden und Kegeln, so gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen haben, einander gleich sind, §. 301. 302. so können auch schief stehende abgekürzte Pyramiden und Kegeln, wenn sie nur parallel abgeschnitten sind, auf eben diese Art berechnet werden.

Bey schief stehenden abgekürzten Pyramiden besonders, wenn die Grundflächen keine regelmässige Vielecke sind, ist es öfters sehr mühesam und beschwerlich, die zur Berechnung nöhtige Linien zu finden, und zu bestimmen. In diesem Falle kan man die beide Grundflächen in gleiche Zirkelflächen verwandeln, §. 232. und alsdenn die Rechnung auf eben die Art fortsetzen, als wenn es ein abgekürzter Kegel wäre.

Aus dieser angeführten Berechnungsart sowohl der abgekürzten Pyramiden, als Kegeln fliesset noch eine andere, so in manchen Fällen eine merkliche Leichtigkeit verschaffet, sie ist folgende:

Fig. 182. & 183. Man setze daß AB = R, DE = r, DC = EB = a IB = y, IE = x, der Inhalt der grössern Grundfläche AG = B, und der Inhalt der kleinern = b, so bekomt man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$R - r : a = R : y = \frac{Ra}{R - r}$$

und

und $R - r : a = r : x = \frac{ra}{R-r}$

Da sich nun ähnliche Flächen wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten gegeneinander verhalten, §. 201. und die Zirkelflächen wie die Quadrate ihrer Radien §. 223. so ist

$$R^2 : r^2 = B : b = \frac{Br^2}{R^2}$$

Demnach ist der Inhalt des ganzen Kegels IAG $= \frac{BRa}{3R-3r}$, und des kleinen IDF $= \frac{Br^3a}{3R^3-3R^2r}$ folglich der Inhalt des abgekürzten DAGF

$$= \frac{BRa}{3R-3r} - \frac{Br^3a}{3R^3-3R^2r},$$

und wenn man den Zähler und Nenner des ersten Bruches mit R^2 multipliciret, um beiden gleiche Nenner zu geben, so bekomt man

$$\frac{BR^3a - Br^3a}{3R^3 - 3R^2r} = \frac{a}{3} \times \left(\frac{BR^3 - Br^3}{R^3 - R^2r}\right).$$

Dividiret man nun Zähler und Nenner mit $R - r$, so findet man

$$\frac{a}{3} \times \left(\frac{BR^2 + BRr + Br^2}{R^2}\right) = \frac{a}{3} \times \left(B + \frac{Br}{R} + \frac{Br^2}{R^2}\right).$$

Nun ist B die grosse Grundfläche $\frac{Br^2}{R^2}$ die kleine, und $\frac{Br}{R}$ ist eine mitlere geometrische Proportional zwischen B und $\frac{Br^2}{R^2}$ §. 211. N. 3. Rechenk.

Hier-

Hieraus fliessen demnach folgende Regeln:

1. Berechnet den Flächeninhalt der beiden Grundflächen besonders.

2. Suchet zwischen beiden eine mitlere geometrische Proportionalfläche.

3. Addiret alle drei Flächen zusammen.

4. Endlich multipliciret diese Summe mit dem dritten Teil der Höhe des abgekürzten Kegels oder der Pyramide, so ist das Produkt der körperliche Inhalt davon.

Zusatz.

§. 317. Ist eine Pyramide, die mit der Grundfläche nicht parallel abgeschnitten ist, zu berechnen, so suchet zuvor ebenfals die Höhe, die sie hätte, wenn sie ganz wäre; die abgeschnittene Spitze aber sehet als eine schief stehende Pyramide an, und alsdenn ist bei der Berechnungsart selbst kein anderer Unterschied von der vorigen, als daß die dazu nöhtige Maassen in solchem Falle etwas schwerer richtig auszumessen, und öfters nur nach trigonometrischen Gründen zu bestimmen sind. In der Ausübung, wo selten die äusserste Schärfe verlanget wird, ist das bequemste Mittel, wenn man sich von der gegebenen Pyramide einen senkrechten Durchschnitte auf dem Papier entwirft, damit man dieselbe um so richtiger ergänzen, und die nöhtige Linien bestimmen kan. Schief abgeschnittene Kegeln lassen sich nach den bisher abgehandelten Grün-

Gründen deswegen nicht berechnen, weil der schrähe Durchschnit eine elliptische Fläche ausmachet, von der wir erstlich zu seiner Zeit Meldung machen werden.

Viertes Hauptstück.

Von der Kugel.

Lehrsatz.

§. 318.

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels, und dem Durchmesser derselben.

Vorbereitung: Wenn man sich vorstellet, daß die Fläche des grösten Zirkels einer Kugel ein Polygon von unendlich kleinen Seiten sei, so sich um ihre Achse EQ bewege, so wird es einen körperlichen Raum beschreiben, der aus lauter abgestuzten und aufeinander gelegten Kegeln, wovon einer durch den Durchschnit ABGI vorgestellet wird, bestehen; und da man eine Seite AB des Polygons unendlich klein annimt, so ist auch der Bogen, wozu sie eine Sehne ist, als unendlich klein zu betrachten, und man kan ohne merklichen Feh- Fig 184.

ler

ler eines für das andere nehmen. Aus dieser Ursache können wir auch diese abgestuzte Kegeln als Teile oder Zonen der Kugel, die ganze Kugel selbst aber aus lauter solchen Kegeln zusammen gesezt ansehen. Erweisen wir nun, daß die Oberfläche eines solchen Kegels wie ABGI gleich sei dem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels der Kugel durch seine Höhe YZ = BX, so ist auch erwiesen, daß die Oberfläche aller Kegeln zusammen genommen, d. i. die Oberfläche der Kugel gleich sei dem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels durch den Diameter EQ der Kugel, als welcher allen Höhen der Kugel zusammen genommen gleich ist.

Beweis: Ziehet demnach aus der Mitte einer Polygonseite AB die Linie CH parallel mit AI oder BG, nicht minder die Linie CM perpendikular auf AB, welche als der Diameter des grösten Zirkels der Kugel anzusehen ist, §. 59. und die Punkte C, H und M werden, wegen der unendlich kleinen Sehnen willen, in dem Umkreise selbst enthalten sein. Ziehet man nun noch HM senkrecht auf AI, und die Punkte H und M zusammen, so entstehen zwei rechtwinkelichte Dreiecke CHM §. 80. und AXB, wo in dem ersten der Winkel CMH + MCH = 90° §. 95. und weil CM perpendikular auf AB, so ist auch BCH + MCH

MCH = 90° §. 42. folglich ist CMH + MCH = BCH + MCH und also ist der Winkel CMH = BCH. Ferners wegen den Parallelen CH und AI ist der Winkel BCH = BAX §. 54. folglich CMH = BAX, und die beide Dreiecke CMH und BAX sind einander ähnlich §. 140. deswegen ist

$$BX : AB = CH : CM.$$

Nun aber ist CH der Durchmesser der mitlern Zirkelfläche des abgestuzten Kegels ABGI, und CM der Durchmesser des grösten Zirkels der Kugel, und weil sich ferner die Durchmesser der Zirkel wie ihre Umkreise verhalten §. 148. und BX = YZ, so können wir in obiger Proportion diese anstaat iene setzen, d. i. wenn wir die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise = d : p annehmen, so ist der Umkreis von CH = $\frac{pCH}{d}$, und von CM = $\frac{pCM}{d}$, folglich bekommen wir anstaat der vorigen Proportion YZ : AB = $\frac{pCH}{d} : \frac{pCM}{d}$, hievon geben uns die äussere und mitlere

$$\frac{pCH}{d} \times AB = \frac{pCM}{d} \times YZ.$$

Nun ist das vordere Glied die Oberfläche des abgekürzten Kegels ABGI §. 295. und daß hindere das Produkt aus dem Umkreise des grösten Zirkels der Kugel, und der Höhe des

Kegels, folglich bestehet diese Oberfläche aus diesem Produkte. Weil endlich alle Höhen der abgestuzten Kegel, so die ganze Kugel ausmachen, zusammen genommen dem Durchmesser EQ der Kugel gleich sind, so mus auch das Produkt aus dem Umkreise des grösten Zirkels und den Durchmesser der Oberfläche aller Kegeln zusammen genommen oder der Oberfläche der Kugel gleich sein, d. i.

$$\frac{pCM}{d} \times EQ \text{ oder } \frac{pCM}{d} \times CM.$$

Zusaz.

§. 319. Da man eine Zone ABGI, oder einen Abschnit BGE einer Kugel als einen der abgestuzten Kegeln, woraus die Kugel bestehet, ansehen kan, und in vorigem Lehrsatze erwiesen worden ist, daß die Oberfläche eines solchen Kegels gleich sei dem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels der Kugel, durch die Höhe des Kegels, so ist auch die Oberfläche einer Zone, oder eines Abschnittes der Kugel dem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels der Kugel durch die Höhe derselben gleich, d. i. die Oberfläche der Zone ABGI ist $= \frac{pCM}{d} \times YZ$, und die Oberfläche des Abschnittes BGE $= \frac{pcM}{d} \times YE$.

Da

Da ferner die halbe Kugel nichts anders als ein Abschnit ist, so den Radius zur Höhe hat, so ist auch die Oberfläche derselben gleich einem Produkte aus dem Umkreise des grösten Zirkels durch den Radius.

Zusatz.

§. 320. Weil demnach die Oberfläche der Kugel $= \frac{pCM}{d} \times CM = \frac{p\overline{CM}^2}{d}$, und die Fläche des grösten Zirkels der Kugel $= \frac{pCM}{2d} \times \frac{CM}{2} = \frac{p\overline{CM}^2}{4d}$ §. 210. so verhält sich die erstere Oberfläche zu der andern wie
$\frac{p\overline{CM}^2}{d} : \frac{p\overline{CM}^2}{4d} = \frac{4p\overline{CM}^2}{d} : \frac{p\overline{CM}^2}{d} = 4 : 1.$
Folglich ist die Oberfläche der Kugel viermal so gros als die Fläche ihres grösten Zirkels.

Zusatz.

§. 321. Weil die Oberfläche einer Kugel $\frac{pCM}{d} \times CM$ ist, §. 318. und die Oberfläche eines Cylinders, der den Diameter der Kugel sowohl zur Höhe, als Diameter hat, ebenfals $= \frac{pCM}{d} \times CM$ §. 284. so ist die Ober-

fläche einer Kugel gleich der Oberfläche eines Cylinders, der um die Kugel beschrieben ist.

Aufgabe.

§. 322. Den Durchmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche gegeben ist.

Auflösung: Es sei die Oberfläche der Kugel = m und ihr Durchmesser = x, so ist

$$\frac{px^2}{d} = m \text{ §. 320.}$$

folglich $$\frac{dm}{p} = x^2,$$

und $$\sqrt[2]{\frac{dm}{p}} = x.$$

Lehrsatz.

§. 323. Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer Durchmesser, Radien, oder andere gleichnahmigte Linien.

Beweis: Der Durchmesser einer Kugel sei = a, und einer andern = b, so ist die Oberfläche der erstern $= \frac{pa^2}{d}$, und der andern $= \frac{pb^2}{d}$ §. 318. folglich verhalten sich die Oberflä-

chen

chen gegeneinander wie $\frac{pa^2}{d} : \frac{pb^2}{d} = pa^2 : pb^2$ $= a^2 : b^2 = \frac{a^2}{4} : \frac{b^2}{4}$, d. i. wie die Quadrate der Durchmesser oder der Radien.

Aufgabe.

§. 324. Den Durchmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche zu der Oberfläche einer gegebenen Kugel ein verlangtes Verhältnis haben sol.

Auflösung: Es sei der Diameter der gegebenen Kugel = a, der gesuchten = x, und die Verhältnis der Oberflächen sei m : n, so ist m : n = aa : xx §. 323.

$$\frac{aan}{m} = xx,$$

$$\sqrt{\frac{aan}{m}} = x.$$

Um die Oberfläche einer Kugel von Papier, oder einer andern Materie zu verfertigen, so beschreibet Fig. 185.

1. Ein Rechteck ABCD, so daß AB dem ganzen, AD aber dem halben Umkreise des grösten Zirkels der Kugel gleich werde.

2. Teilet BC und AD in zween gleiche Teile, und ziehet durch E und F die unbestimte Linie RG.

3. Teilet die Linie EF in so viele gleiche Teile F1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. als euch beliebet, und ieden dieser Teile nochmals in die Hälfte, und durch diese leztere Teilungspunkten ziehet die Linien ab, cd, ef, gh, u. s. w. parallel mit CB.

4. Suchet nach §. 60. zu den drei Punkten aib den Mittelpunkt G, damit ihr aus demselben mit der Eröffnung Gb den Bogen aib ziehen könnet.

5. Traget aus G gegen F die gleiche Teile Gilmn, u. s. w. die denen F1, 2, 3, u. s. w. gleich sind, und machet aus i mit der vorigen Eröffnung des Zirkels den Bogen c2d, aus l den Bogen e3f, und aus m den Bogen g4h u. s. w.

6. Ziehet auf eben diese Art von der andern Seite die Bögen aFb, C1d, e2f, g3h u. s. w. indem ihr die Linie FE bis in R verlängert, und in die vorige Teile einteilet.

7. Schneidet man nun die ganze Figur dergestalt aus, daß nichts als die zwischen den Bögen eingeschlossene Teile übrig bleiben, iedoch so, daß sie in der Mitte noch etwas weniges zusammen hangen, und bieget die Spizen alle gegen einen Punkt auf ieder Seite zusammen, bis sich alle Bögen einander berühren, so wird dadurch die Oberfläche einer Kugel vorgestellet, die um so genauer sein wird, in wie mehrere Teile die Linie EF eingeteilet worden.

Lehrsaz.

§. 325. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich dem Produkte aus ihrer Ober-

flä-

fläche durch ein Drittel des Radius derselben.

Beweis: Wenn wir uns vorstellen, daß die Oberfläche einer Kugel aus einer unendlichen Menge kleiner geraden Flächen zusammen gesezt sei, deren iede die Grundfläche einer Pyramide ist, so mit ihrer Spitze in den Mittelpunkt A der Kugel reichet, so können wir die Kugel ansehen, als ob sie aus einer unendlichen Menge kleiner Pyramiden bestünde, die alle zusammen die Oberfläche der Kugel zu ihren Grundflächen, den Radius aber zu Höhen haben. Da aber der körperliche Inhalt einer Pyramide gleich ist dem Produkte aus ihrer Grundfläche durch $\frac{1}{3}$ ihrer Höhe §. 305. so ist auch der Inhalt aller dieser Pyramiden zusammen genommen, oder der Kugel selbst gleich dem Produkt aus der Oberfläche der Kugel durch $\frac{1}{3}$ des Radius, d. i. wenn die Oberfläche der Kugel nach §. 318. $= \frac{pa^2}{d}$, und der Radius $= \frac{a}{2}$, so ist der körperliche Inhalt der Kugel $= \frac{pa^2}{d} \times \frac{a}{6} = \frac{pa^3}{6d}$. Fig. 186.

Zusatz.

§. 326. Um demnach den Inhalt einer Kugel zu berechnen, so kan man entweder

1. Die Oberfläche der Kugel mit $\frac{1}{3}$ des Radius, d. i. $\frac{1}{6}$ des Durchmessers, oder

2. Die Fläche des grösten Zirkels mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers multipliciren. Denn im ersten Falle ist $\frac{pa^2}{d} \times \frac{a}{6} = \frac{pa^3}{6d}$, und im andern Falle ebenfals $\frac{pa^2}{4d} \times \frac{2a}{3} = \frac{2pa^3}{12d} = \frac{pa^3}{6d}$.

Es verhält sich demnach der Cubus des Durchmessers einer Kugel zu dem Inhalt derselben wie $a^3 : \frac{pa^3}{6d} = 1 : \frac{p}{6d} = 6d : p$. d. i. wie 600 : 314 oder wie 6000 : 3141, oder wie 60000 : 31415 u. s. w. §. 149. woraus ebenfals der Inhalt einer Kugel dessen Durchmesser gegeben ist, gefunden werden kan.

Zusatz.

Fig. 187. §. 327. Wenn ein Cylinder ABCD mit einer Kugel gleichen Diameter CD, und denselben auch zur Höhe EF hat, folglich um die Kugel beschrieben ist, so ist der Inhalt davon $= \frac{p\overline{CD}^2}{4d} \times CD$ §. 284. und der von der Kugel $= \frac{p\overline{CD}^2}{4d} \times \frac{2CD}{3}$ §. 325. folglich

ist

ist der Inhalt einer Kugel nur $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte eines um sie beschriebenen Cylinders.

Wenn ferner ein Kegel einerlei Durchmesser und Höhe hat, so ist er der dritte Teil von dem vorigen Cylinder §. 306. und also die Hälfte von der Kugel, oder sein Inhalt ist $= \frac{p\overline{CD}^2}{4d} \times \frac{CD}{3}$; folglich wenn der Cylinder = 3 ist, so ist die Kugel = 2, und der Kegel = 1; oder wenn der Cylinder gleich 1, so ist die Kugel = $\frac{2}{3}$ und der Kegel = $\frac{1}{3}$.

Eben das, was wir hier von der Verhältnis der ganzen Kugel gegen einen um sie beschriebenen Cylinder gesagt haben, verstehet sich auch von einer halben ILE und den um sie beschriebenen Cylinder ABIL.

Zusatz.

§. 328. Gleichwie man nach §. 325. eine ganze Kugel aus unendlich vielen Pyramiden zusammen gesezt betrachten kan, die ihre Grundfläche an der Oberfläche der Kugel, und den Radius zur Höhe haben, eben so kan man auch einen Ausschnit ABCD ansehen, Fig. 156. als ob er aus einer Menge Pyramiden bestünde, die ihre Grundfläche an der Fläche des Abschnittes BCD, und den Radius zur Höhe haben. Um also den körperlichen Inhalt dieser Pyramiden oder des Ausschnittes zu finden,

den, muß man die Summe ihrer Grundflächen, so die Fläche des Abschnits BCD ist, durch den dritten Teil des Radius AB multipliciren. §. 305.

Zusatz.

§. 329. Da der Ausschnit ABCD einer Kugel aus dem Abschnitte BCD, und aus dem Kegel ABD, der die gerade Fläche des Abschnittes zur Grundfläche, den Teil AO aber des Radius zur Höhe hat, bestehet, so findet man den Inhalt eines Abschnittes der Kugel wenn man erstlich sowohl den ganzen Ausschnit nach §. 328. als auch den Kegel berechnet, und den leztern von erstern abziehet.

Zusatz.

§. 330. Ziehet man von dem Inhalte einer ganzen Kugel den Inhalt beider Abschnitte DCE, und BOG, die auf den geraden Flächen der Zona DBGE stehen, ab, so bleibet der Inhalt der Zona übrig.

Fig. 158.

Zusatz.

§. 331. Wenn sich zwo der grösten Zirkelflächen einer Kugel in der Achse FG in einen beliebigen Winkel BAC durchschneiden, so ist der körperliche Inhalt eines solchen Stückes FBGCF, ein solcher Teil von der ganzen Kugel,

Fig. 188.

gel, als der Bogen BC von dem ganzen Umkreise des grösten Zirkels ist; oder dieses Stück verhält sich zur ganzen Kugel wie der Bogen BC zum ganzen Umkreise.

Aufgabe.

§. 332. Aus dem gegebenen Inhalte der Kugel den Durchmesser zu finden.

Auflösung: Es sei der körperliche Inhalt der Kugel = m, und der Durchmesser = x,

so ist $\frac{px^3}{6d} = m$ §. 326.

und $px^3 = 6dm$,

ferner $x^3 = \frac{6dm}{p}$,

folglich $x = \sqrt[3]{\frac{6dm}{p}}$.

Aufgabe.

§. 333. Eine gegebene Kugel in ein Parallelopipedum zu verwandeln, daß zur Grundfläche ein Quadrat, und zur Höhe die doppelte Seite der Grundfläche bekommen sol.

Auflösung: Es sei der Durchmesser der Kugel = a, die Seite der Grundfläche des gesuchten Parallelopipeds = x, und folglich die Höhe davon = 2x, so ist der Inhalt der

Ku-

den, mus man die Summe ihrer Grundflächen, so die Fläche des Abschnits BCD ist, durch den dritten Teil des Radius AB multipliciren. §. 305.

Zusaz.

§. 329. Da der Ausschnit ABCD einer Kugel aus dem Abschnitte BCD, und aus dem Kegel ABD, der die gerade Fläche des Abschnittes zur Grundfläche, den Teil AO aber des Radius zur Höhe hat, bestehet, so findet man den Inhalt eines Abschnittes der Kugel wenn man erstlich sowohl den ganzen Ausschnit nach §. 328. als auch den Kegel berechnet, und den leztern von erstern abziehet.

Zusaz.

§. 330. Ziehet man von dem Inhalte einer ganzen Kugel den Inhalt beider Abschnit-
Fig. 158. te DCE, und BOG, die auf den geraden Flächen der Zona DBGE stehen, ab, so bleibet der Inhalt der Zona übrig.

Zusaz.

§. 331. Wenn sich zwo der grösten Zirkel-
Fig. 188. flächen einer Kugel in der Achse FG in einen beliebigen Winkel BAC durchschneiden, so ist der körperliche Inhalt eines solchen Stückes FBGCF, ein solcher Teil von der ganzen Kugel,

gel, als der Bogen BC von dem ganzen Umkreise des grösten Zirkels ist; oder dieses Stück verhält sich zur ganzen Kugel wie der Bogen BC zum ganzen Umkreise.

Aufgabe.

§. 332. Aus dem gegebenen Inhalte der Kugel den Durchmesser zu finden.

Auflösung: Es sei der körperliche Inhalt der Kugel $= m$, und der Durchmesser $= x$,

so ist $\frac{px^3}{6d} = m$ §. 326.

und $px^3 = 6dm$,

ferner $x^3 = \frac{6dm}{p}$,

folglich $x = \sqrt[3]{\frac{6dm}{p}}$.

Aufgabe.

§. 333. Eine gegebene Kugel in ein Parallelopipedum zu verwandeln, daß zur Grundfläche ein Quadrat, und zur Höhe die doppelte Seite der Grundfläche bekommen sol.

Auflösung: Es sei der Durchmesser der Kugel $= a$, die Seite der Grundfläche des gesuchten Parallelopipeds $= x$, und folglich die Höhe davon $= 2x$, so ist der Inhalt der

Ku-

Kugel $= \frac{pa^3}{6d}$, und des parallelopipeds $=$

$2x^3$, folglich ist $\frac{pa^3}{6d} = 2x^3$,

$$\text{und } \frac{pa^3}{12d} = x^3,$$

$$\text{folglich } \sqrt[3]{\frac{pa^3}{12d}} = x.$$

Auf eine ähnliche Weise hätte man zu verfahren, wenn man eine Kugel in irgend einen andern Körper verwandeln solte, der mit ihr einen gleichen Inhalt haben sol.

Lehrsaz.

§. 334. Die Inhalte der Kugeln verhalten sich gegeneinander wie die Cubi ihrer Diameter, Radien, oder anderer gleichnahmigten Linien.

Beweis: Da wir die Kugel als eine unendliche Menge kleiner Pyramiden ansehen können, §. 325. und ähnliche Pyramiden sich wie die Cubi ihrer gleichnahmigten Seiten verhalten, §. 312. so müssen sich auch die Kugeln, da sie alle einander ähnlich sind, wie die Cubi ihrer Diameter, Radien, oder anderer gleichnahmigter Linien verhalten; folglich verhalten sich auch umgekehrt die Durchmesser, die Radien, und die übrige gleich-

nah-

nahmigte Linien der Kugeln gegeneinander, wie die Cubikwurzeln aus ihren körperlichen Inhalten §. 217. N. 2. Rechenk.

Zusatz.

§. 335. Diesem Lehrsatz zufolge läst sich der Diameter einer Kugel finden, die mit einer andern gegebenen in einem verlangten Verhältnis sein sol; denn wenn sich zwo Kugeln gegeneinander wie $m : n$ verhalten sollen, und der Diameter der ersten $= a$, der andern $= x$ ist, so ist $m : n = a^3 : x^3$,

folglich $\frac{na^3}{m} = x^3$,

und $\sqrt[3]{\frac{na^3}{m}} = x$.

Nach der bisher gegebenen Anleitung lassen sich die meiste durch gerade, und Zirkelflächen eingeschlossene Körper berechnen, und wenn sie gleich nicht gänzlich von der Art sind, wie die so wir bisher abgehandelt haben, so können sie doch in unserer Einbildung beinahe in solche zerteilet werden. Jedoch sind noch sehr viele Gattungen von Körpern übrig, die sich entweder gar nicht nach geometrischer Schärfe berechnen lassen, und bei denen man nur mit einer Annäherung zufrieden sein mus; oder deren Berechnung von höhern Gründen abhanget, die wir in gegenwärtigen Anfangsgründen nicht berühren können. Kommen sehr unregelmässige Körper vor, welche sich

sich auf keine Weise nach diesen angeführten Gründen berechnen lassen, dabei aber doch von einer solchen Grösse sind, daß man sie füglich in ein regelmäßiges leicht zu berechnendes Gefäs einschliessen kan, so wird man ihren Inhalt noch zimlich genau erfahren, wenn man das Gefäs, in welchen der Körper lieget, mit feinem Sande, oder Wasser so weit anfüllet, daß er ganz damit bedeckt wird; hierauf den Körper herausnimt, den Sand wieder eben ausgleichet, und den Unterschied des Raumes, den der Sand, oder das Wasser nach herausgenommenen Körper in dem regelmässigen Gefäs zeiget, als den Inhalt des Körpers berechnet.

Fünftes Hauptstück.

Von Berechnung des körperlichen Inhalts.

§. 336.

Weil das Maas des körperlichen Inhalts in einem Würfel, so dabei zur Einheit oder zum Ganzen angenommen wird, bestehet, §. 263. so wird dieses Ganze entweder nach dem zehnteiligen, oder nach dem zwölfteiligen Maasse in kleinere Teile und Einheiten zerleget; woraus denn bei den Körpern, so

wie

wie bei den Flächen ein doppeltes Maas entstehet.

§. 337. Wenn iede Dimension des Würfels, so zur Einheit des Maasses angenommen ist, in zehn gleiche Teile eingeteilet wird, so entstehet daraus das **zehnteilige Körpermaas** (Cubikmaas). Nun enthält ieder Würfel, dessen Dimensionen auf diese Art eingeteilet worden, tausend kleinere Würfel, dessen Dimensionen die vorhergehende Teile sind. §. 280. Ist demnach das Ganze eine Cubikruhte, so enthält solche 1000. Cubikschuhe; ein Cubikschuh 1000. Cubikzolle; ein Cubikzol 1000. Cubiklinien, u. s. w.

Weil bei dem Cubikmaasse tausend kleinere Einheiten erst eine nächstfolgende grössere ausmachen, so müssen auf iede Gattung derselben drei Ziffern gerechnet werden, um aus ihrer Stelle unmittelbar ihren Wehrt zu erkennen, oder die grössere Einheiten in kleinere, und umgekehrt die kleinere in grössere zu verwandeln, ohne zu diesen Reduktionen die Multiplikation, und Division nöhtig zu haben. Wären z. B. 34 Cubikruhten in Cubiklinien zu verwandeln, so setzet 34°, 000′, 000″, 000‴C. oder es wären 7006850002‴ C. auf höhere Einheiten zu bringen, so setzet 7°. 6′. 850″. 2‴C., oder auch: 7°. 006′. 850″. 002‴C.

Alle vier einfache Rechnungsarten sowohl als die Ausziehungen der Wurzeln geschehen damit unverändert, wie mit den unbenanten Zahlen überhaupt.

Es

Es sei z. B. die Länge eines Parallelopipeds $= 4^{\circ}. 2'. 6''$; die Breite $= 7'$; und die Höhe $= 12^{\circ}$; so ist der körperliche Inhalt $= 35^{\circ}. 784'$C.

Oder, wenn der körperliche Inhalt wäre $= 19^{\circ}. 268'. 094''$C.; und die Höhe $= 12^{\circ}. 8'. 3''$, so ist die Grundfläche $= 1^{\circ}. 50'. 18''$Q.

§. 338. Das zwölfteilige Cubikmaas ist so wie das Flächenmaas §. 235. von gedoppelter Gattung. Die erste ist wenn die drei Dimensionen des Würfels in die gewöhnliche zwölf Teile, oder wenn es ein Cubikklafter ist, in sechs Teile eingeteilet werden; nach diesem Maasse enthält also eine Cubikklafter 216 Cubikschuhe; ein Cubikschuh 1728 Cubikzolle; ein Cubikzol 1728 Cubiklinien, u. s. w. und die damit anzustellende Rechnungen müssen nach den Regeln der benanten Zahlen verrichtet werden.

Sollen Cubikklafter auf Cubikschuhe, und so ferner auf kleinere Einheiten gebracht werden, so multipliciret man sie mit 216; dieses Produkt mit 1728. u. s. w. So auch im Gegenteil, wenn kleinere Einheiten auf grössere zu bringen sind, so dividiret nach und nach mit eben diesen Zahlen.

Ueberhaupt werden die Rechnungen auf eben die Art verhälenismässig angestellet, wie in der Anmerkung bei §. 235. gezeiget worden.

Es sei z. B. die Länge eines Parallelopipeds $= 3^{\circ}. 5'. 7''. = 283''$; die Breite $= 4' = 48''$,

48'', und die Höhe = 6°. 0'. 5'' = 437''; so ist der körperliche Inhalt = 5936208''C. = 15°. 195'. 528''C.

Oder es sei der körperliche Inhalt = 21°. 173'. 648''C. und die Höhe = 5°. 4'. 3'', so ist die Grundfläche = 3°. 29'. 72''Q.

Bei Ausziehung der Cubikwurzeln wird das Cubikmaas auf so kleine Einheiten gebracht, daß man den zurückbleibenden Ueberrest ohne Nachteil der Richtigkeit füglich vernachläßigen kan.

§. 339. Die andere Art des zwölfteiligen Cubikmaasses bestehet darin, daß anstaat aller dreien, nur eine Dimension des zur Einheit angenommenen Würfels oder Cubikklafters in die gewöhnliche Schuhe, Zolle, u. s. w. eingeteilet wird, die übrige beide aber unverändert gelassen werden. Die dadurch entstehende Teile, in welche der ganze Würfel zerleget wird, sind also keine Würfel mehr, sondern Schichten und gerade Parallelopipedums, so eine Quadratklafter zur Grundfläche, und zur Höhe die Abteilungen der dritten Dimension nehmlich Schuhe, Zolle, Linien u. s. w. haben. Die Cubikklafter wird demnach in sechs Parallelopipedums eingeteilet, deren iedes eine Quadratklafter zur Grundfläche, und einen Schuh zur Höhe hat, welches ein **Schuh des Cubikklafters** (Cubikklafterschuh) genennet wird. Ein solcher Schuh enthält zwölf Parallelopipedums,

Es sei z. B. die Länge eines Parallelopipeds = 4°. 2′. 6″; die Breite = 7′; und die Höhe = 12°; so ist der körperliche Inhalt = 35°. 784′C.

Oder, wenn der körperliche Inhalt wäre = 19°. 268′. 094″C.; und die Höhe = 12°. 8′. 3″, so ist die Grundfläche = 1°. 50′. 18″Q.

§. 338. Das zwölfteilige Cubikmaas ist so wie das Flächenmaas §. 235. von gedoppelter Gattung. Die erste ist wenn die drei Dimensionen des Würfels in die gewöhnliche zwölf Teile, oder wenn es ein Cubikklafter ist, in sechs Teile eingeteilet werden; nach diesem Maasse enthält also eine Cubikklafter 216 Cubikschuhe; ein Cubikschuh 1728 Cubikzolle; ein Cubikzol 1728 Cubiklinien, u. s. w. und die damit anzustellende Rechnungen müssen nach den Regeln der benanten Zahlen verrichtet werden.

Sollen Cubikklafter auf Cubikschuhe, und so ferner auf kleinere Einheiten gebracht werden, so multipliciret man sie mit 216; dieses Produkt mit 1728. u. s. w. So auch im Gegenteil, wenn kleinere Einheiten auf grössere zu bringen sind, so dividiret nach und nach mit eben diesen Zahlen.

Ueberhaupt werden die Rechnungen auf eben die Art verhälnismässig angestellet, wie in der Anmerkung bei §. 235. gezeiget worden.

Es sei z. B. die Länge eines Parallelopipeds = 3°. 5′. 7″. = 283″; die Breite = 4′ = 48″,

48'', und die Höhe = 6°. 0'. 5'' = 437''; so ist der körperliche Inhalt = 5936208''C. = 15°. 195'. 528''C.

Oder es sei der körperliche Inhalt = 21°. 173'. 648''C. und die Höhe = 5°. 4'. 3'', so ist die Grundfläche = 3°. 29'. 72''Q.

Bei Ausziehung der Cubikwurzeln wird das Cubikmaas auf so kleine Einheiten gebracht, daß man den zurückbleibenden Ueberrest ohne Nachteil der Richtigkeit füglich vernachläßigen kan.

§. 339. Die andere Art des zwölfteiligen Cubikmaasses bestehet darin, daß anstaat aller dreien, nur eine Dimension des zur Einheit angenommenen Würfels oder Cubikklafters in die gewöhnliche Schuhe, Zolle, u. s. w. eingeteilet wird, die übrige beide aber unverändert gelassen werden. Die dadurch entstehende Teile, in welche der ganze Würfel zerleget wird, sind also keine Würfel mehr, sondern Schichten und gerade Parallelopipedums, so eine Quadratklafter zur Grundfläche, und zur Höhe die Abteilungen der dritten Dimension nehmlich Schuhe, Zolle, Linien u. s. w. haben. Die Cubikklafter wird demnach in sechs Parallelopipedums eingeteilet, deren iedes eine Quadratklafter zur Grundfläche, und einen Schuh zur Höhe hat, welches ein Schuh des Cubikklafters (Cubikklafterschuh) genennet wird. Ein solcher Schuh enthält zwölf Parallelopipedums,

so eine Quadratklafter zur Grundfläche, und einen Zol zur Höhe haben; **Zolle des Cubikklafters** (Cubikklafterzolle); und ein solcher Zol enthält ferner zwölf **Linien**, oder Parallelopipedums, so eine Quadratklafter zur Grundfläche und eine Linie zur Höhe haben. Die Rechnung selbst vermittelst welcher der Inhalt eines Körpers nach diesem Maasse ausgemessen, und gefunden wird, macht einen Teil der Toisirrechnung aus §. 236.

Hieraus erhellet also, daß auf diese Art bei den Längen, Flächen, und Körpermaasse iederzeit einerlei Abteilungen beibehalten werden; worin der eigentliche Endzweck der Toisirrechnung bestehet.

§. 340. Wil man diese Schuhe, Zolle, und Linien, u. s. w. des Cubikklafters in eigentliche Cubikschuhe, Cubikzolle, Cubiklinien u. s. w. nach der ersten Art §. 338. verwandeln, so bedenke man, daß die ersten insgesammt eine Quadratklafter zur Grundfläche haben, und ihre Benennung nur von der verschiedenen Höhe erhalten, §. 339. folglich so viele Quadratschuhe, Quadratzolle, Quadratlinien u. s. w. in dieser Grundfläche enthalten sind, eben so viele Cubikschuhe, Cubikzolle, Cubiklinien, u. s. w. werden auch in einem Schuhe, Zolle, Linien, u. s. w. des Cubikklafters enthalten sein. Demnach

ent-

enthält ein Schuh des Cubikklafters 36′C.; ein Zol des ersten 5184″C.; eine Linie des ersten 746496‴C.; u. s. w. folglich geschiehet diese Verwandlung durch die blosse Multiplicirung mit den vorerwähnten Zahlen; und wenn im Gegenteile die Cubikschuhe, Cubikzolle, u. s. w. in die Teile des Cubikklafters verwandelt werden sollen, so darf man nur damit dividiren.

Z. B. Es wären 37°. 5′. 0″. 9‴ von Cubikklafter in Cubikteile der erstern Art zuverwandeln, so machen solche 24408179712‴C. oder auch 37°. 544195584‴C. = 37°. 182′. 432″C.

Desgleichen, wenn 13°. 25′. 506″. 39‴C. in Teile des Cubikklafters zu verwandeln wären, so machen sie 13°. 75524007‴C. = 13°. 0′. 8″. 5‴. 2⁗ vom Cubikklafter.

§. 341. Weil demnach bei diesem Klaftermaasse der Körper eben die Abteilungen beibehalten werden, so bei dem Längenmaasse gebräuchlich sind; eben sowohl als bei dem Flächenmaasse, so geschehen auch die Rechnungen damit bei der Multiplikation, Division, und Ausziehung der Cubikwurzel, nach eben den Regeln der Toisirrechnung, so §. 237. 238. 240. 241. und 242. gelehret worden.



Fünfter Abschnit.

Von den Kegelschnitten.

Erstes Hauptstück.

Von der Parabol.

Erklärung.

§. 342.

Fig. 189. Wenn ein Kegel durch eine gerade Fläche mit einer Seite AB parallel durchschnitten wird, so wird die dadurch auf der Oberfläche des Kegels beschriebene krumme Linie eine **Parabol** genennet.

Erklärung.

§. 343. Der oberste Punkt E des Durchschnits heist der **Scheitel**; die Linie ED aber, so in der Durchschnitsfläche parallel mit AB, auf den Diameter BC der Grundfläche des Kegels gezogen ist, die **Achse der Parabol**.

Er-

Erklärung.

§. 344. Die Linien, welche in einer Parabol von einer Seite zur andern, und senkrecht auf die Achse gezogen werden, nennet man Ordinaten.

So sind KI und MN Ordinaten und stehen auf der Achse ED sehkrecht. Man kan sich einbilden, als ob eine unendliche Menge Ordinaten in einer Parabol gezogen wären, und denn wird MN d. i. die in der Grundfläche des Kegels unter allen die Gröste sein.

Erklärung.

§. 345. Der Teil der Achse, so zwischen dem Scheitel E und einer Ordinate enthalten ist, wird die Abscisse eben derselben Ordinate genennt.

So ist EL die Abscisse der Ordinate KI, und EQ von OP; die gröste Ordinate MN aber hat die ganze Achse zur Abscisse.

Zusatz.

§. 346. Wird ein Kegel zugleich durch eine Fläche FG parallel mit BC, und durch eine andere MEN parallel mit der Seite AB durchschnitten, so daß durch die erste auf der Oberfläche ein Zirkel, §. 257. durch die andere aber eine Parabol entstehet, so mus der Durchschnit beider Flächen in einer Ordinate

KI der Parabol geschehen, die man zugleich als eine Sehne der Zirkelfläche, so auf dem Diameter FG senkrecht stehet, ansehen kan, weil sowohl die Sehnen der Zirkelflächen als auch die Ordinaten der Parabolen mit der Grundfläche des Kegels parallel sind.

Zusatz.

§. 347. Weil die halbe Sehne eines Zirkels die mittlere Proportional zwischen den Teilen des Diameters ist, worauf sie senkrecht stehet, §. 151. so ist auch die halbe Ordinate KL oder IL die mitlere Proportional zwischen den Teilen FL und LG des Diameters der Zirkelfläche, so die Achse der Parabol
Fig. 190. in eben der Ordinate KI durchschneidet. Wenn man dahero einen Kegel in seinen Durchschnit ABC durch die Achse, samt der Richtung ED des parabolischen Schnits vorstellet, eine Menge Parallelen HK, FG u. s. w. mit BC ziehet, dieselbe als Diameters der mit der Grundfläche des Kegels parallel laufenden Zirkeln betrachtet, und zu den Teilen BD und DC, HQ und QK, FL und LG u. s. w. in die sie durch den parabolischen Schnit geteilet werden, mitlere Proportionalen DN, QP, LI u. s. w. suchet, so kan man die durch den Schnit ED entstehende Parabol MRO, wie folget, zeichnen: erstlich setzt man RS = DE perpendikular auf MO, und teilet RS in

eben

eben die Teile in welche DE eingeteilet worden; ferners ziehet man durch diese Teilungspunkten T, U u. s. w. Parallelen zu MO, machet SM = SO = DN; TV = TY = QP; UX = UZ = LI u. s. w. und ziehet die Punkten M, V, X, R, Z, Y, O zusammen, so ist die dadurch entstehende Linie die Parabol, die am Rande des Durchschnits DE entstehet.

Zusatz.

§. 348. Wenn also in einem Kegel ABC mehrere Durchschnitte ED, NO und FI parallel mit AB gemacht werden. So werden 1. die Achsen ihrer Parabolen um so grösser sein, als sie näher an AB genommen worden. 2. Wenn der Durchschnit auf die Grundfläche in dem Mittelpunkte O auftrift, so ist die gröste halbe Ordinate dem Radius OM gleich, und folglich die gröste, die in einem Durchschnitte dieses Kegels möglich ist. 3. Je weiter der Durchschnit von dem Mittelpunkte O in D oder I auftrift, je kleiner wird auch die gröste halbe Ordinate DL oder IP sein. 4. Zwo Parabolen, die in einem Kegel nach den Durchschnitten ED und FI, so in gleicher Weite von dem Mittelpunkte O auf die Grundfläche in D und I auftreffen, entstehen, haben ihre gröste halbe Ordinaten DL und IP gleich, ihre Achsen aber ungleich. Fig. 191.

Erklärung.

Fig. 192. §. 349. Wenn in einem Kegel ABC der parabolische Durchschnit nach der Achse ED geschieht, und man träget BD, oder FE aus A in G, und ziehet GH parallel zu BC, so wird GH der **Parameter** dieser Parabol genent.

Zusatz.

§. 350. Je mehr sich die Achse ED der Seite AB nähert, oder davon entfernet, ie kleiner oder grösser wird auch die Lienie BD = FE = AG, folglich auch die Linie GH, d. i. der Parameter selbsten. Daher mus eine iede Parabol die in einem Kegel durch einen andern Durchschnit entstanden ist, einen andern und zwar ihren eignen Parameter haben; weil aber nach der Achse ED oder EL die Linie IL, BD, RO, FE beständig einander gleich bleiben, §. 56. folglich auch AG und GH unveränderlich sind, so verbleibet allezeit einerlei Parameter in der Parabol, es mag solcher zu der Abscisse EO, ED oder EL u. s. w. gesuchet werden; folglich ist der Parameter einer Parabol eine unveränderliche Linie, da im Gegenteile die Absciſſen und Ordinaten von der Scheitel an beständig wachsen und zunehmen, und daher veränderliche Linien sind.

Aus

Aus dem folgenden wird erhellen, wie nohtwendig der Parameter zu Bestimmung der Parabol und zu ihrer Beschreibung sei.

Damit man aus der Bezeichnung dieser Grössen und Linien so gleich erkennen möge, ob sie beständige oder veränderliche Grössen der krummen Linie sind, so hat man zum Gebrauche angenommen, die veränderlichen mit den letzten Buchstaben des Alphabets ... x, y, z, die beständigen aber mit den ersten anzudeuten. Es wird demnach in dem folgenden allezeit a den Parameter, x die Abscisse, und y die halbe Ordinate vorstellen.

Lehrsatz.

§. 351. In jeder Parabol ist das Quadrat einer jeden halben Ordinate DN gleich dem Rechtecke aus dem Parameter GH, und der der Ordinate zukommenden Abscisse DE.

Beweis: Weil AG mit DE, und GH mit BC parallel ist §. 342. und 349. so sind die Dreiecke AGH und EDC einander ähnlich §. 140. folglich ist:

$$AG : GH = ED : DC$$

und

$GH \times ED = AG \times DC$. §. 209. Rechenk. und weil nach §. 349. $AG = BD$ gemacht worden, so ist, wenn man gleiches staat gleichen setzet:

$$GH \times ED = BD \times DC.$$

Da ferner die halbe Ordinate DN die mitlere Proportional zwischen BD, und DC ist §. 347. so ist:

$$BD : DN = DN : DC,$$

und daher

$$BD \times DC = \overline{DN}^2. \text{ §. 210. Rechenk.}$$

Wenn wir nun in der obigen Gleichung anstaat $BD \times DC$ den izt gefundenen gleichen Wehrt $\overline{DN}^2$ setzen, so ist:

$$GH \times ED = \overline{DN}^2.$$

D. i. das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse ist gleich dem Quadrat der halben Ordinate. Eben dieses läst sich auch von einer ieden andern halben Ordinate erweisen, und der Parameter ist allezeit die dritte Proportionallinie zu einer Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Zusaz.

§. 352. Wenn man diese Haupt- und algemeine Eigenschaft der Parabol algebraisch ausdrücket, und z. B. die halbe Ordinate $=y$, die ihr zukommende Abscissa $=x$, und den Parameter $=a$ nennet, so ist die obige Gleichung $y^2 = ax$, und wenn man sie in die Proportion $x:y=y:a$ auflöset, so erhellet, daß die halbe Ordinaten mitlere Proportionalen zwischen dem Parameter und den ihnen zukommenden Abscissen sind. Wenn also

zwei

zwei von diesen drei Stücken einer Parabol bekant sind, so läßt sich allezeit das dritte finden. Denn sol man den Parameter aus der Abscisse und der halben Ordinate finden, so setzet: $\frac{y^2}{x} = a$. Sol die Abscisse aus dem Parameter und der Ordinate bestimt werden, so ist $\frac{y^2}{a} = x$; und wenn die Ordinate aus dem Parameter, und der Abscisse gefunden werden sol, so ist die Formul $y = \sqrt{ax}$.

Lehrsatz.

§. 353. In ieder Parabol verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten wie die ihnen zukommende Abscissen.

Beweis: Weil die Quadrate der halben Ordinaten den Rechtecken aus dem Parameter, und den Abscissen gleich sind, d. i. §. 351. $\overline{DN}^2 = GH \times ED$, und $\overline{OP}^2 = GH \times EO$; so ist $\overline{DN}^2 : \overline{OP}^2 = GH \times ED : GH \times EO$, oder die Quadrate der Ordinaten verhalten sich gegeneinander, wie die Rechtecke aus dem Parameter und den Abscissen, da aber beide Rechtecke den Parameter GH zur Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien §. 174. d. i. $GH \times ED : GH \times EO = ED : EO$, folglich ist auch $\overline{DN}^2 : \overline{OP}^2 = ED : EO$. §. 215. Rechenk. d. i. die Quadrate der halben Ordinaten ver- Fig. 192.

hal-

halten sich gegeneinander, wie die ihnen zukommende Abscissen, und daher stehen auch die ganzen Ordinaten in eben dieser Verhältnis. §. 215. Rechenk.

Zusatz.

Fig. 193. §. 354. Ziehet man von der Scheitel E eine Linie EC parallel mit den Ordinaten LX, DN, OP, und errichtet aus P, N, X, die perpendikularen PM, NI, XC, so wird ME = PO, IE = ND, CE = XL = den Ordinaten, und MP = EO, IN = ED, CX = EL = den Abscissen. Derowegen ist auch $\overline{ME}^2 : \overline{IE}^2 = MP : IN$.

Zusatz.

§. 355. Wenn also von einer Parabol eine Ordinate und zwo Abscissen, oder zwo Ordinaten und eine Abscisse bekant sind, so läst sich nach obigen Lehrsatz allezeit die zwote finden, wenn man sie zum vierten Gliede der Proportion annimt.

Erklärung.

Fig. 194. §. 356. Der **Brenpunkt** F einer Parabol AEB ist derienige, in welchen eine Ordinate PS, dem Parameter GH gleich ist.

Zu-

Zusaz.

§. 357. Weil die Quadrate der Ordinaten sich gegeneinander verhalten, wie die Abscissen §. 353. diese leztere aber von der Scheitel an beständig zunehmen und wachsen, so mus solches auch mit den Quadraten der Ordinaten, folglich mit den Ordinaten selbst geschehen §. 217. Rechenk. Es können also in einer Parabol nicht zwo Ordinaten einander gleich sein, folglich ist auch nur eine Ordinate dem Parameter gleich, und daher hat auch iede Parabol nur einen Brenpunkt.

Man nent diesen Punkt aus der Ursache den Brenpunkt, weil sich die durch einen parabolischen Spiegel aufgefangenen Lichtstralen daselbst vereinigen.

Lehrsaz.

§. 358. Der Abstand des Brenpunkts F von der Scheitel E einer Parabol ist gleich dem vierten Teile des Parameters GH.

Beweis: Jede halbe Ordinate einer Parabol ist die mitlere Proportional zwischen dem Parameter und der Abscisse §. 352. folglich ist auch GH : $\frac{PS}{2} = \frac{PS}{2}$: EF, vermög der Erklärung des Brenpunkts aber ist $\frac{PS}{2} = \frac{GH}{2}$ §. 356. daher ist GH : $\frac{GH}{2} = \frac{GH}{2} : \frac{GH}{4}$ = EF.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 359. Jede Linie die aus dem Brennpunkte bis an das Ende einer Ordinate der Parabol gezogen wird, ist gleich der Abscisse dieser Ordinate samt dem vierten Teile des Parameters.

Fig.194. Beweis: Es sei der Parameter $= a$, CD $= y$, CE $= x$, so ist EF $\frac{a}{4}$ §. 357. und CF $= x - \frac{a}{4}$,

folglich $\overline{CF}^2 = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$

$\overline{CD}^2 = y^2 = ax$, §. 352.

also $\overline{FD}^2 = \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{16} - a^2 = a^2 + \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2}{16}$

§. 182. und daher FD $= x + \frac{a}{4}$.

Wie nun dieses von der Ordinate CD der Abscisse CE und der Linie FD erwiesen worden, eben so kan es mit einer ieden andern AL, und FA, und ihrer Abscisse LE geschehen.

Aufgabe.

§. 360. Eine Parabol zu beschreiben, wozu der Parameter gegeben ist.

Fig.195. Auflösung: 1. Ziehet eine Linie IC von beliebiger Länge, und machet sowohl IE, als

EF

EF = $\frac{1}{4}$ Parameter GA, so ist E der Scheitel und F der Brenpunkt der Parabol. §. 358.

2. Ziehet durch F eine Perpendikular PS auf IC, und zu derselben eine Menge Parallelen MN, AL, BD u. s. w. (ie näher diese Parallelen aneinander sind, ie richtiger wird sich auch die Parabol beschreiben lassen).

3. Nehmet mit einem Zirkel die Weite OI, und aus F durchschneidet MN in M und N; eben dieses geschiehet mit der Weite FI aus F in P und S; mit der Weite RI aus F in A und L, und mit der Weite CI aus F in B und D u. s. w.

4. Ziehet endlich alle Durchschnitspunkten B, A, P, M, E, N, S, L, D zusammen, so wird die dadurch entstehende krumme Linie die verlangte Parabol sein §. 359.

Zusatz.

§. 361. Aus dem nemlichen Grunde läst sich auch eine Parabol auf folgende praktische Art beschreiben: nemlich 1. ziehet eine Linie MN, und setzet eine Perpendikular IC darauf. 2. Machet IE = EF = $\frac{1}{4}$ Parameter; schlaget in F einen Stift ein, und befestiget daran das Ende eines Fadens, der die Länge der Achse CE samt $\frac{1}{4}$ Parameter hat, oder = CI ist. 3. Leget an die Linie MN ein Lineal, und an dasselbe einen Winkelhacken, an dessen Seite IC ihr das Fig. 196.

an-

andere Ende des Fadens in C befestiget. 4. Spannet den Faden mit einem Griffel dergestalt an, daß der Griffel in E stehe, der Faden aber von F bis E doppelt zu liegen komme. 5. Schiebet hierauf den Winkelhacken längst IM nach und nach in O, D und B, und folget demselben mit dem Griffel nach, so daß er beständig an dem Winkelhacken verbleibe, und die Länge des Fadens von F bis O und O bis C, so wie von F bis D und von D bis C wohl ausgespannet werde. Wenn nun dieses auf der andern Seite eben so geschiehet, so wird die durch den Griffel beschriebene krumme Linie eine Parabol sein, weil die Linien FO, FD, FB u. s. w. beständig $= x + \frac{a}{4}$.

Erklärung.

Fig. 197. §. 362. Wenn die Achse CE bis in I um $\frac{1}{4}$ Parameter verlängert, und eine Perpendikular MN darauf gesetzet wird, so wird die leztere die **Richtungslinie** (Directrix) der Parabel genennet.

Zusatz.

§. 363. Lässet man von der Direktrix MN Perpendikularen OU und MB auf die Endpunkte der Ordinaten fallen, so sind sie den Abscissen dieser Ordinaten mehr $\frac{1}{4}$ Parameter gleich; d. i. OU = XI, und MB = IC, und nach

§. 359.

§. 359. ist auch OU = FU, und MB = FB.

Erklärung.

§. 364. Wenn eine Linie TB eine Parabol nicht durchschneidet, sondern nur in einem Punkte B berühret, so wird sie eine Tangente der Parabol genennet.

Lehrsatz.

§. 365. Wenn man aus einem Punkte B einer Parabol eine Perpendikular BM auf die Direktrix MN, und aus dem Brenpunkte die Linie FM ziehet, solche in D in zween gleiche Teile teilet, und aus B durch D eine gerade Linie BDT führet, so wird diese die Parabol nur in dem Punkt B berühren, und folglich eine Tangente sein.

Beweis: Weil FB = MB §. 363. und MD = DF, nach der Bedingung des Lehrsatzes, so mus DB perpendikular auf MF stehen §. 46. N. 2. und alle Linien die wie MP, und FP von M und F zu einem Punkte P der Linie DB gezogen werden, müssen einander gleich sein §. 33. wäre nun ein Punkt wie P der Linie DB in der Parabol, und man zöge von demselben eine Perpendikular PO auf die Direktrix, so müste PO = PF sein, §. 363. da aber PF = PM, und PM die

Hypothenuse von PMO, und folglich grösser als PO ist §. 97. so kan PO nicht = PF, und folglich auch der Punkt P nicht in der Parabol sein, sondern mus sich ausser derselben befinden. Da sich nun dieses von allen Punkten der Linie TB, den Punkt B allein ausgenommen, eben so erweisen läst, so hat die gerade Linie TB nur den einzigen Punkt B mit der Parabol gemein, alle übrige Punkte fallen ausser derselben, folglich berührt sie die Parabol und ist eine Tangente davon. §. 66.

Zusaz.

§. 366. Man kan also nach diesem Lehrsaze zu einem gegebenen Punkte B einer Parabol eine Tangente BT ziehen, wenn man BM parallel mit der Achse führet, und = BF, machet, hierauf M und F mit einer Linie zusammen ziehet, sie in D in zween gleiche Teile teilet, und die Linie BD ziehet.

Erklärung.

§. 367. Wenn man die Achse CE einer Parabol bis in T, wo sie mit der Tangente BT zusammen trift, verlängert, so wird die Linie TC die Subtangente genennet.

Lehrsaz.

§. 368. Die Subtangente TC einer Parabol ist doppelt so gros als die Achse CE.

Be-

Beweis: Da die Linie BT perpendikular auf MF ist §. 365. so macht sie in D vier rechte Winkel §. 42. daher ist der Winkel MDB = BDF = FDT, ferner da MB parallel mit TC; so ist der Winkel MBT = CTB, §. 54. und BMD = DFT §. 54. Weil nun auch MD = DF ist, so sind die drei Dreiecke MBD, BDF und FDT einander gleich, und derowegen ist auch FB = FT §. 34. Nun aber ist FB = CE + IE §. 359. und TF = TE + EF, folglich CE + IE = TE + EF, und weil EF = IE ist §. 358. und 362. so ist CE = TE, folglich 2CE = TC, d. i. die Subtangente TC ist doppelt so gros als die Achse CE.

Zusatz.

§. 369. Nach diesem Lehrsatze ist es also leicht, zu einem in der Parabol gegebenen Punkte B eine Tangente BT zu ziehen; indem man nur die Achse CE verlängert bis TE = CE wird, und denn BT ziehet.

Aufgabe.

§. 370. Eine Parabol zu beschreiben, wenn ihre gröste Ordinate BR, und der Winkel TBR, den sie mit der Tangente TB machet, gegeben sind.

Auflösung: 1. Zeichnet den gegebenen Winkel TBR; machet BR der gegebenen grösten Ordinate gleich, und auf ihre Mitte C errichtet eine Perpendikular CT, so ist diese die Subtangente, §. 367. und wenn ihr sie in zween gleiche Teile TE = EC teilet, so ist E der Scheitel, CE aber die Achse, oder die Abscisse der grösten Ordinate §. 368.

2. Suchet zur Abscisse und Ordinate die dritte Proportional, so erhaltet ihr den Parameter §. 352.

3. Machet ferner EF = EI = $\frac{1}{4}$ Parameter, so ist F der Brenpunkt §. 358. und I der Punkt, durch welchen die Richtungslinie gehet §. 362.

4. Beschreibet endlich die Parabol nach §. 360.

Erklärung.

§. 371. Wenn auf das Ende B einer Ordinate BR eine Tangente BT, zu dieser aber aus dem Berührungspunkte B eine Perpendikular BA gezogen wird, so wird der Teil CA der Achse, der zwischen der Ordinate und Perpendikular enthalten ist, die Subnormal der Parabol genennet.

Lehrsatz.

§. 372. Die Subnormal CA ist dem halben Parameter der Parabol gleich.

Be-

Beweis: Die zwei Dreiecke BCT und ACB sind einander ähnlich §. 152.
folglich ist TC : CB = CB : CA,
und weil TC = 2CE §. 368.
so ist 2CE : CB = CB : CA,
folglich ist $\overline{CB}^2 = 2CE \times CA$,
und $\frac{\overline{CB}^2}{2CE} = CA$,
oder $\frac{\overline{CB}^2}{CE} = 2CA$.

Da nun $\frac{\overline{CB}^2}{CE}$ der Parameter ist §. 352. folglich auch 2CA, so ist CA dem halben Parameter gleich.

Zusatz.

§. 373. Es läst sich also nach diesem Lehrsatze der Parameter einer Parabol, davon man eine Ordinate und ihre Absciße kennet, finden, wenn man von dem Ende B der Ordinate eine Tangente BT §. 266. und eine Subtangente TC errichtet; leztere noch weiter abwerts verlängert, und denn in B eine Perpendikular BA auf BT errichtet, wodurch der halbe Parameter CA abgeschnitten wird.

Lehrsatz.

§. 374. Wenn aus einem Punkte D der Parabol eine Tangente DI, eine Ordinate DF Fig. 198.

und eine Subtangente IF gezogen wird, so ist das dadurch entstehende rechtwinkelichte Dreieck DFI dem Rechtecke CAFD, aus der Achse AF und der halben Ordinate DF gleich.

Beweis: Weil in den beiden Dreiecken ILA und LDC die beide Seiten AI = CD = AF §. 368. 354. und auch die gleichnahmigte Winkel gleich sind, so sind sie einander selbsten gleich; folglich ist das Trapezium

LAFD + ILA = LAFD + LDC

d. i. das Dreieck DFI ist dem Rechtecke CAFD gleich.

Erklärung.

Fig. 198. §. 375. Jede Linie DO, die in einer Parabol von einem beliebigen Punkte D parallel mit der Achse AE gezogen ist, wird ein **Diameter** der Parabol genennet.

Erklärung.

§. 376. Wenn man zu einem beliebigen Punkt D einer Parabol eine Tangente NI, und innerhalb derselben eine Parallel HM die sich beiderseits an der Parabol endet, von dem Berührungspunkt D aber einen Diameter DO ziehet, so wird HM eine **Ordinate dieses Diameters** genennet.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 377. Jede Ordinate HM eines Diameters DO wird durch denselben in zween gleiche Teile oder halbe Ordinaten MX und HX geteilet.

Beweis: 1. Weil DI und HB miteinander, und HE, DF und MG ebenfalls parallel sind, so sind die Dreiecke BHE, IDF und BMG einander ähnlich §. 54. u. 139. und verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigten Seiten $\overline{HE}^2 : \overline{DF}^2 : \overline{MG}^2$. §. 201. Diese Quadrate aber sind zugleich die Quadrate der Ordinaten zur Achse AE, und diese verhalten sich wie die ihnen zukommende Abscissen §. 353. also verhalten sich auch die drei ähnliche Dreiecke zu einander wie diese Abscissen, d. i.

$$BHE : IDF = AE : AF,$$
$$BHE : BMG = AE : AG,$$
$$IDF : BMG = AF : AG.$$

2. Da die Rechtecke OEAC, DFAC, und PGAC gleiche Grundlinien OE = DF = PG, und die Abscissen AE, AF, AG zu ihren Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen §. 174. d. i. wie diese Abscissen; folglich verhalten sich auch die ähnliche Dreiecke zu einander wie diese Rechtecke, d. i.

BHE : IDF = OEAC : DFAC,
BHE : BMG = OEAC : PGAC,
IDF : BMG = DFAC : PGAC.

Nun ist aber das Dreieck IDF = DFAC §. 374. also ist auch BHE = OEAC, und BMG = PGAC §. 205. Rechenk.

3. Daher ist ferner
BHE — BMG = OEAC — PGAC,
d. i. HEGM = OEGP.

4. Nimt man endlich von diesen beiden Grössen den Teil OEGMX, den sie miteinander gemein haben, hinweg, so verbleibt das Dreieck PMX = HOX, und da sie zugleich einander ähnlich sind, folglich sich decken, so sind auch die gleichnahmigte Seiten gleich, d. i. HX = MX. §. 33. – 35.

Eben dieses läst sich von ieder andern Ordinate des Diameters erweisen.

Erklärung.

§. 378. Ein ieder Teil DX, eines Diameters DO, so sich zwischen dem Berührungspunkte D, und einer Ordinate HM befindet, wird die **Abscisse** derselben **Ordinate des Diameters** genennet.

Lehrsatz.

§. 379. Die Quadrate der Ordinaten eines Diameters verhalten sich zu einander, wie die ihnen zugehörige Abscissen.

Vor-

Vorbereitung: Es sei der Diameter AO und dessen beide halbe Ordinaten NL und OG, deren leztere bis an den Scheitel G der Parabol gehet. Ziehet demnach die Tangente AF, und mit der Subtangente FB die Parallel DC, und endlich die halbe Ordinate der Achse LM. Fig. 199.

Beweis: Es sei GB = FG = x; folglich FB = 2x; GM = v; LC = MB = x — v; AB = y; LM = z, und AC = y — z. Nun ist $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2 = GB : GM$ §. 353.

d. i. $y^2 : z^2 = x : v = \frac{z^2x}{y^2}$,

und $LC = x - \frac{z^2x}{y^2}$,

ferner ist AB : AC = FB : DC §. 137.

d. i. $y : y - z = 2x : DC = \frac{2xy - 2xz}{y}$.

Daher ist $DL = DC - LC = \frac{2xy - 2xz}{y} -$

$x + \frac{z^2x}{y^2} = \frac{2xy^2 - 2xyz - xy^2 + z^2x}{y^2} =$

$\frac{xy^2 - 2xyz + z^2x}{y^2}$.

Wenn man nun diese Gleichung in eine Proportion auflöset, so ist

$y^2 : y^2 - 2yz + z^2 = x : DL$,

d. i. $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = FG : DL$,

und da die Dreiecke AFB und ADC einander ähnlich sind §. 139. so ist auch

$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 : \overline{AD}^2$ §. 217. Rechenk.

folglich ist $\overline{AF}^2 : \overline{AD}^2 = FG : DL$.

Da nun die Linien FB, DC, AO; ferner AF, NL, und OG miteinander parallel lauffen, so ist AF = OG; AD = NL; FG = AO, und DL = AN §. 56.

deswegen ist $\overline{OG}^2 : \overline{NL}^2 = AO : AN$.

Da nun dieses auf gleiche Art von allen übrigen folglich auch ganzen Ordinaten erwiesen werden kan, so verhalten sich überhaupt die Quadraten der Ordinaten eines Diameters, wie die ihnen zugehörige Abscissen.

Zusatz.

§. 380. Wenn man zu den beiden Abscissen AN, AO, und ihren zugehörigen halben Ordinaten NL und OG, eine dritte Proportionallinie suchet, so bekommt man zu den beiden ersten

$$AN : NL = NL : \frac{\overline{NL}^2}{AN}$$

und zu den beiden andern

$$AO : OG = OG : \frac{\overline{OG}^2}{AO},$$

nun ist $AN : AO = \overline{NL}^2 : \overline{OG}^2$ §. 379.

folglich ist $AO \times \overline{NL}^2 = AN \times \overline{OG}^2$,

und

und $\frac{AO \times \overline{NL}^2}{AN} = \overline{OG}^2$,

endlich $\frac{\overline{NL}^2}{AN} = \frac{\overline{OG}^2}{AO}$,

folglich sind die dritte Proportionallinien zu den Abscissen und Ordinaten des Diameters allezeit einander gleich. Dieses ist also eine beständige und unveränderliche Linie, während daß die Abscissen und Ordinaten des Diameters von dem Berührungspunkt A an beständig wachsen und zunehmen. Diese beständige Linie heist also auch in eben dem Verstande, wie §. 349. 351. **der Parameter des Diameters.**

Zusatz.

§. 381. Nennet man diesen Parameter = a, so ist AN : NL = NL : a,

folglich $AN \times a = \overline{NL}^2$,

d. i. das Quadrat der halben Ordinate eines Diameters ist dem Rechtecke gleich aus der Abscisse in dem Parameter.

Diese Eigenschaften, so man als Gleichungen und eigentliche Unterscheidungsstücke der Parabol ansehen mus, sind demnach algemein, und finden nicht blos bei der Achse staat, sondern auch bei allen Diametern.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 382. Der Parameter eines ieden Diameters ist gleich der vierfachen Achse samt ihren Parameter zusammen genommen.

Beweis: Es sei die Achse OB = FG = AO = x; der Parameter der Achse = a, und der Parameter des Diameters = A; so ist in dem rechtwinklichten Dreiecke AFB

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FB}^2,$$

nun ist $\overline{AB}^2 = ax$ §. 352.

und $\overline{FB}^2 = 4x^2$,

folglich $\overline{AF}^2 = ax + 4x^2$.

Weil nun OG = AF, folglich auch $\overline{OG}^2 = \overline{AF}^2$, so ist auch $\overline{OG}^2 = ax + 4x^2$. Nun ist ferner $\overline{OG}^2 = AO \times A$ §. 381. $= Ax$, folglich ist $Ax = ax + 4x^2$, und $A = a + 4x$. Wenn demnach der Parameter der Achse bekant ist, so kan daraus der Parameter zu einem ieden verlangten Diameter gefunden werden, und umgekehrt.

Zusatz.

§. 383. Weil $A = a + 4x$, so ist $\frac{A}{4} = \frac{a}{4}$, d. i. der vierte Teil des Parameters vom Diameter ist gleich der Entfernung des Berührungspunkts bis zum Brenpunkte, oder der Linie BF §. 359. oder auch CI.

Auf-

Aufgabe.

§. 384. In einer gegebenen Parabol ABC den Parameter und den Brenpunkt zu finden. Fig. 200.

Auflösung: 1. Ziehet zwo beliebige Parallellinien GH, und AI innerhalb der Parabol; teilet iede in N und P in zween gleiche Teile, und durch diese Teilungspunkten ziehet die unbestimte Linie EF.

2. Lasset von einem Ende A oder C der Parabol eine Perpendikular AC auf EF fallet; teilet sie in L in zween gleiche Teile.

3. Ziehet LD parallel zu EF, so ist LB die Achse; und wenn ihr BD = LB machet, so ist BL die Subtangente, und folglich könt ihr die Tangente AD ziehen §. 369.

4. Richtet in A eine Perpendikular AM auf AD, so die verlängerte Achse durchschneidet, so ist LM der halbe Parameter §. 372. und trägt man $\frac{LM}{2} = \frac{1}{4}$ Parameter aus B in O, so ist auch der Brenpunkt O bestimt §. 358.

Erklärung.

§. 385. Ein Rechteck ADEC, welches die Achse BF einer Parabol zur Höhe, und die gröste Ordinate AC derselben zur Grundlinie hat, wird ein um die Parabol beschriebenes Rechteck genennet, und die Figur AD- Fig. 201.

BEC

BEC so außer der Parabol ist, heist das Complement derselben.

Erklärung.

§. 386. Ein Abschnit einer parabolischen Fläche ist ein ieder Teil ONMP, so zwischen zwo Ordinaten enthalten ist.

Lehrsatz.

§. 387. Der Inhalt einer Fläche die durch eine Parabol ABC, und eine Ordinate AC eingeschlossen ist, ist gleich zween Dritteilen eines Rechteckes ADEC, so um dieselbe beschrieben ist.

Beweis: Man bilde sich ein, daß von der Linie BE unendlich viele Linien IN und LM, als Elemente der Fläche BEC, parallel mit BF bis an die krumme Linie, und von den Durchschnitspunkten N und M, halbe Ordinaten GN, HM, gezogen wären; so sind diese Elemente den Abscissen, ihre Entfernungen von der Scheitel B aber den halben Ordinaten gleich. Nun aber verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie ihre Abscissen, §. 353. also ist auch

$$\overline{BI}^2 : \overline{BL}^2 = IN : LM.$$

d. i. die Quadrate der Abstände der Elementen verhalten sich zu einander wie die Elemente selbst. Vermög §. 301. aber verhalten sich

die

die Elemente einer Pyramide ebenfalls wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze der Pyramide, oder ihrer Höhen, also verhalten sich auch die Elemente des Teiles BEC des um die Parabol beschriebenen Rechteckes wie die Elemente einer Pyramide. Man findet aber die Summe aller Elementen einer Pyramide oder ihren Kubikinhalt, wenn man das gröste Element durch den dritten Teil der Anzahl Elementen, oder der Höhe multipliciret §. 305. also mus man auch die Summe aller Elementen d. i. der Flächen Inhalt des Teiles BEC finden, wenn man das gröste Element EC durch den dritten Teil des Abstandes BE multiplicirt, d. i.

$$BEC = \frac{EC \times BE.}{3}$$

Der Inhalt des Rechteckes BECF aber ist $= EC \times BE$, also ist der Teil BEC nur der dritte Teil davon, und folglich die halbe parabolische Fläche BFC $= \frac{2}{3}$ von dem Rechtecke BECF. Da sich nun eben dieses von der andern Hälfte BDAF auf gleiche Art beweisen läst, so ist der Inhalt der Parabol gleich zween Dritteilen des um sie beschriebenen Rechteckes.

Erklärung.

§. 388. Wenn sich eine halbe parabolische Fläche AOBF um ihre Achse BF beweget, so Fig. 202.

wird

wird der dadurch beschriebene körperliche Raum ABC ein Paraboloides (parabolischer Kegel) genennet; wo demnach die Zirkelflächen, so in dieser Bewegung durch die halben Ordinaten beschrieben werden, die Elemente des Paraboloides werden.

Lehrsatz.

§. 389. Der körperliche Inhalt eines Paraboloides ABC ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche, und halben Achse.

Beweis: Man nehme an, daß die Achse BF des Paraboloides aus einer unendlichen Menge kleiner und gleicher Teile, BG, GH, HF bestehe, und daß dahero BG, BH, BF eine arithmetische Progression vorstellen. Nun verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten GO, HP, FA wie ihre Abscissen BG, BH, BF §. 353. und also wie die Glieder einer arithmetischen Progression, folglich sind auch die Quadrate der Ordinaten in einer arithmetischen Progression. Ferner sind die Elemente des Paraboloides, die zusammen genommen den körperlichen Inhalt ausmachen, lauter Zirkelflächen, deren Radien die halbe Ordinaten sind, und die sich wie die Quadrate ihre Radien verhalten §. 223. also stehen auch diese Elemente in einer arithmetischen Progression, deren leztes Glied der Zirkel von AF, das erste aber der Scheitel B selbsten,

sten, folglich = O ist. Um aber die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progreßion deren erstes Glied = O, zu finden, so mus man das lezte Glied durch die halbe Anzahl der Glieder multipliciren; §. 269. Rechenk. folglich um die Summe aller Elemente des Paraboloides, d. i. seinen körperlichen Inhalt zu finden, so mus man die Grundfläche AC als das lezte Glied der Progreßion durch die halbe Achse BF, so die Anzahl der Glieder ausdrucket, multipliciren.

Zusaz.

§. 390. Da der körperliche Inhalt eines Cylinders aus dem Produkte seiner Grundfläche mit seiner ganzen Höhe §. 284. eines Paraboloides aber aus dem Produkte der Grundfläche mit der halben Achse oder halben Höhe bestehet, so ist ein Paraboloides, der mit einem Cylinder gleiche Grundfläche, und Höhe hat, nur die Hälfte von demselben.





Zweites Hauptstück.

Von der Ellipse.

Erklärung.

§. 391.

Fig. 203. Wenn ein Kegel GIH mit einer geraden Fläche durch beide Seiten IG, und IH schräge zu der Achse durchschnitten wird, so wird die am Rande des Schnittes entstehende krumme Linie ACBD eine Ellipse genent.

Eine Ellipse ist also eine Linie, die in sich selbst zurück gehet, und ganz geschlossen ist, wo im Gegenteil die Schenkel der Parabol sich immer weiter von einander entfernen.

Erklärung.

§. 392. Die Linie AB, die von dem Anfangspunkte des Schnittes bis an sein Ende gezogen wird, heisset die grosse Achse; CD aber, die auf der Mitte von AB perpendikular stehet, und sich beiderseits am Rande des Durchschnits endet, die kleine Achse, und der Durchschnitspunkt O beider Achsen ist der Mittelpunkt der Ellipse. Insgemein aber wer-

werden beide Achsen zusammen die **koniugirte Achsen** genennet.

Erklärung.

§. 393. Die Linien, so in einer Ellipse auf einer oder der andern Achse perpendikular stehen, und beiderseits bis an die Ellipse reichen, werden die **Ordinaten** derienigen Achse, worauf sie perpendikular sind, genennet.

So sind NQ, CD, EF Ordinaten der grossen Achse AB; und NE, AB, QF Ordinaten der kleinen CD. Dieienige aber, so die Achse, worauf sie stehet, in zween gleiche Teile teilet, ist die gröste Ordinate, oder die koniugirte Achse selbst. Fig. 204.

Zusatz.

§. 394. Bildet man sich ein, daß ein Kegel GIH mit zwo Flächen, und zwar mit einer nach der Linie AB, d. i. durch beide Seiten des Kegels, und schräge mit seiner Achse; und mit der andern nach PR, d. i. parallel zur Grundfläche durchschnitten sei, so entstehet auf dem Rande des ersten Durchschnits eine Ellipse §. 391., und auf dem Rande des andern ein Zirkel §. 257.; die Linie EF aber, in der sich beide Flächen durchschneiden, kan man so wohl als eine Ordinate der Ellipse, als auch als eine Sehne des Zirkels, die auf dem Diameter PR perpendikular stehet, ansehen. Fig. 203.

Zusatz.

§. 395. Weil die halbe Sehne ET die mitlere Proportional zwischen den Teilen TR, und TP des Diameters, §. 151. und zugleich die halbe Ordinate der Ellipse ist, so kan man eine Menge halbe Ordinaten einer in einem Kegel ausgeschnitenen Ellipse finden, wenn man zu den Teilen der Diameter der mit der Grundfläche des Kegels parallel lauffenden Zirkeln mitlere Proportionalen suchet; und folglich mit denselben eine Ellipse auf eine ähnliche Art beschreiben, wie wir §. 347. von der Parabol gewiesen haben.

Lehrsatz.

§. 396. Die Quadrate der Ordinaten der grossen Achse einer Ellipse verhalten sich gegen einander wie die Rechtecke aus den Abschnitten dieser Achse, so durch die Ordinaten entstehen.

Fig. 203. **Vorbereitung:** Man stelle sich vor, als ob der Kegel GIH, in dem eine Ellipse ACBD ausgeschniten ist, auch noch nach XY, und PR d. i. parallel zur Grundfläche durchschniten wäre; so werden die Zirkelflächen PR und XY die elliptische Fläche in den Ordinaten EF, und LM, die man zugleich als Sehnen der Zirkeln ansehen kan, durchschneiden §. 394, und die Achse AB wird sie in zween gleiche Teile

Teile LS = SM, und ET = TF, oder in halbe Ordinaten, diese aber die Achse AB in die Abschnite AS, SB, und AT, TB teilen. Wir haben demnach zu erweisen, daß

$$\overline{LS}^2 : \overline{ET}^2 = AS \times SB : AT \times TB \text{ sei.}$$

Beweis: 1. Aus den §. 151. gegebnen Eigenschaften des Zirkels ist bekant, daß:

$$\overline{LS}^2 = XS \times SY \text{ und } \overline{ET}^2 PT \times TR$$

folglich daß: $\overline{LS}^2 : \overline{ET}^2 = XS \times SY : PT \times TR.$

2. Die zwei Dreiecke ASY, und ATR, wie auch die zwei BTP und BSX sind einander ähnlich §. 140. also kan man von den ersten zweien setzen:

$$YS : AS = RT : AT.$$

und von den andern zweien:

$$SX : SB = TP : TB.$$

3. Multiplicirt man nun die Glieder beider Proportionen miteinander, so komt:
$XS \times SY : AS \times SB = PT \times TR : AT \times TB.$
§. 216. Rechenk.
und da wir oben gesagt haben, daß

$$\overline{LS}^2 = XS \times SY \text{ und } \overline{ET}^2 = PT \times TR$$

so kann man in der Proportion gleiches anstaat gleichem setzen, so ist:

$$\overline{LS}^2 : AS \times SB = \overline{ET}^2 : AT \times TB.$$

$$\text{oder } \overline{LS}^2 : \overline{ET}^2 = AS \times SB : AT \times TB.$$

d. i. die Quadrate der halben und folglich auch der ganzen Ordinaten verhalten sich zu

einander wie die Rechtecke aus den Abschnitten der Achse.

Weil in einem Zirkel eine iede auf dem Durchmesser senkrecht stehende Linie, oder eine halbe Ordinate des Zirkels die mitlere Proportional zwischen den Segmenten des Zirkels ist §. 151. so ist das Quadrat davon dem Rechtecke aus den beiden Segmenten gleich §. 210. Rechenk. Folglich verhalten sich in einem Zirkel die Quadrate der Ordinaten zu einander wie die Rechtecke aus den Abschnitten des Durchmessers. In dieser Absicht hat demnach der Zirkel mit der Ellipse einerlei Eigenschaft. Wird die kleine Achse der grossen gleich, so verwandelt sich die Ellipse selbst in einen Zirkel, und daher ist auch die Ellipse nichts anders als ein gedruckter Zirkel.

Zusatz.

§. 397. Weil die kleine Achse CD ebenfals als eine Ordinate und zwar als die gröste angesehen werden kan §. 393. so ist nach vorigem Lehrsatze:

$$\overline{ET}^2 : AT \times TB = \overline{CO}^2 : AO \times OB.$$

Weil nun $AO = BO$ §. 392, und folglich dieses Rechteck ein Quadrat ist, welches die halbe grosse Achse zur Wurzel hat, so ist

$$\overline{ET}^2 : AT \times TB = \overline{CO}^2 : \overline{AO}^2.$$

und folglich auch:

$$\overline{ET}^2 : AT \times TB = \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2.$$

das ist: das Quadrat einer ieden halben Ordinate einer Ellipse verhält sich zum Rechtecke aus den Abschnitten der grossen Achse, wie das

das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der grossen. Wenn man also in einer Ellipse beide Achsen nemlich die grosse $= a$ und die kleine $= c$ samt den zweien Abschnitten x und $a - x$ die eine unbekante halbe Ordinate y auf der grossen Achse machet, kennet, so läst sich dieselbe finden, wenn man setzet:

$$a^2 : c^2 = ax - x^2 : y^2$$

folglich ist $\sqrt{\dfrac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}} = y.$

und auf diese Art kan man zu den zwo gegebenen Achsen so viele Ordinaten finden, als man wil, wann man ihnen zuvor ihre Stelle auf der grossen Achse oder die Abschnitte davon bestimmet.

Zusatz.

§. 398. Jene Ordinaten, so gleichweit von dem Mittelpunkte abstehen, geben gleiche Abschnitte der Achse, und folglich diese gleiche Rechtecke; da nun die Quadrate der Ordinaten sich wie diese Rechtecke verhalten §. 396., leztere aber einander gleich sind, so müssen auch die Quadrate der Ordinaten, und folglich auch ihre Wurzeln oder sie selbst einander gleich sein.

Zusatz.

§. 399. Gleichwie nun erwiesen worden, daß sich die Quadrate der Ordinaten einer in einem Kegel ausgeschnittenen Ellipse wie die Rechtecke aus den Abschnitten der grossen Achse verhalten, eben so läßt sich auch leicht erweisen, daß wenn ein Cylinder GH durch eine Fläche mit seiner Grundfläche schräge durchschnitten wird, sich die Quadrate der Ordinaten LS, ET der am Durchschnitte entstehenden Fläche ACBD wie die Rechtecke aus den Abschnitten AS, SB und AT, TB verhalten, und daß also die an einem schräge durchschnittenen Cylinder entstehende krumme Linie ACBD ebenfalls eine Ellipse sei.

Fig. 205.

Aufgabe.

§. 400. Eine Ellipse zu beschreiben, wozu die zwo Achsen gegeben sind.

Auflösung: 1. Setzet die gegebene Achsen AB und CD dergestalt aufeinander, daß sie sich in ihrem Mittelpunkte O senkrecht durchschneiden, und ziehet aus O mit einem Radius AO, der der grossen halben Achse gleich ist, einen Zirkel.

Fig. 206.

2. Teilet AB in beliebige Teile AS, SV, VG u. s. w. ein, und führet durch die Teilungspunkten Parallelen SI, VL, GN u. s. w.

w. zur kleinen Achse CD bis an den Umkreis des Zirkels.

3. Suchet zur grossen und kleinen Achse oder zu OP, OD und zur Ordinate GN des Zirkels eine vierte Proportional, und machet GH gleich derselben. Eben so suchet eine vierte Proportional zu OP, OD und VL, und machet VQ gleich derselben; und so fahret auf diese Art fort so viele vierte Proportionalen zwischen OP, OD und den Ordinaten des Zirkels zu suchen, als ihr Ordinaten zur Ellipse haben wollet.

4. Ziehet endlich die Endpunkte der Ordinaten AMQHD u. s. w. zusammen, so wird die dadurchgehende krumme Linie eine Ellipse sein.

Beweis: Vermög der gegebenen Beschreibung ist OP : OD = GN : GH,

und OP : OD = VL : VQ,

folglich ist auch GN : GH = VL : VQ,

oder auch GN : VL = GH : VQ,

d. i. die Ordinaten des Zirkels verhalten sich zu einander wie die gesuchte Proportionalen. Weiter ist nun auch noch

$\overline{GN}^2 : \overline{VL}^2 = \overline{GH}^2 : \overline{VQ}^2$ §. 217. Rechenk.

vermög den Eigenschaften des Zirkels aber ist GN die mitlere Proportional zwischen AG und GB, und VL zwischen AV und VB §. 151. folglich ist $\overline{GN}^2 = AG \times GB$,

und $\overline{VL}^2 = AV \times VB$.

Setzen wir nun in der obigen Proportion gleiches anstaat gleichen, so bekommen wir

$$AG \times GB : AV \times VB = \overline{GH}^2 : \overline{VQ}^2,$$

d. i. die Rechtecke aus den Abschnitten der grossen Achse verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Linien GH und VQ. Da sich aber diese Rechtecke auch zu einander verhalten, wie die Quadrate der Ordinaten einer Ellipse §. 396. so müssen diese Linien Ordinaten, und folglich die krumme Linie AMQHDBC eine Ellipse sein.

Erklärung.

§. 401. Der **Parameter** der grossen Achse einer Ellipse ist die dritte Proportional zu der grossen und kleinen Achse. Da die grosse und kleine Achse beständige Linien einer Ellipse sind, so mus auch die dritte Proportional zu denselben, folglich der Parameter eine beständige und unveränderliche Linie sein.

Zusatz.

§. 402. Man findet also den Parameter AX einer Ellipse ACBD, wenn man auf das Ende A der grossen Achse eine perpendikular AE = CD aufrichtet, die Linie BE ziehet, und auf dieselbe eine perpendikular EX bis an die verlängerte grosse Achse führet,

Fig. 207.

oder

oder wenn man setzet:

$$AB : CD = CD : AX,$$

so ist $\frac{\overline{CD}^2}{AB} = AX.$

Ueberhaupt kan aus zwoen gegebenen von diesen dreien Grössen allezeit die dritte gefunden werden.

Lehrsatz.

§. 403. Das Quadrat einer halben Ordinate verhält sich zum Rechtecke aus den Abschnitten der Achse, wie der Parameter zur Achse selbsten.

Beweis: Vermög §. 397. verhält sich das Quadrat einer halben Ordinate zum Rechtecke aus den Abschnitten der grossen Achse, wie das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der Grossen, d. i.

$$\overline{OL}^2 : AO \times OB = \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2,$$

und vermög der Erklärung des Parameters ist: $AB : CD = CD : AX.$

Dahero ist $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = AB : AX$ §. 218. Rechenk. oder $\overline{CD}^2 : \overline{AB}^2 = AX : AB.$

Deswegen ist auch $\overline{OL}^2 : AO \times OB = AX : AB$ §. 204. Rechenk.

Zusatz.

§. 404. Wenn man also die grosse Achse, und den Parameter samt den Abschnitten der

Ach-

Achse kennet, so kan man die dazu gehörig Ordinate nach obigem Lehrsatze leicht finden.

Erklärung.

§. 405. Wenn die grosse Achse AB mit einem Radius DF = AO d. i. mit der halben grossen Achse aus D in F und G durchschnitten wird, so werden die zween Durchschnitspunkte die Brenpunkte der Ellipse genennet. Fig. 208.

Verwandelt sich die Ellipse in einen Zirkel, wenn nehmlich beide Achsen von einerlei Grösse werden, so fallen beide Brenpunkte in dem Mittelpunkte des Zirkels zusammen.

Aufgabe.

§. 406. Eine Ellipse, deren zwo Achsen gegeben sind, auf eine praktische Art zu beschreiben.

Auflösung: 1. Setzet die kleine Achse CD dergestalt perpendikular auf die grosse AB, daß sie sich in ihrem Mittelpunkte O durchschneiden, und suchet beide Brenpunkte F und G §. 405.

2. Befestiget einen Faden, der die Länge der grossen Achse AB hat, mit einem Ende in F, und mit dem andern in G, mittelst eingeschlagener Stiften.

3. Spannet den lockern Faden mit einem Griffel an, und fahret mit demselben so herum, daß er immer angespannet bleibe,

so

so wird die dadurch beschriebene Linie eine Ellipse sein, so die gegebene zwo Linien AB und CD zu ihren Achsen hat.

Vorbereitung: Es sei

$$AO = OB = FD = GD = a,$$

$$DO = b. \quad FO = OG = c,$$

und weil der ganze Faden AO + OB, in seiner Anspannung allezeit einerlei Länge behält, so ist auch FD + DG = FI + IG = AO + OB; derowegen nennen wir die Differenz von

$$FI \text{ und } FD = d,$$

und folglich $FI = a + d$,

und $IG = a - d$,

ferner sei die auf die grosse Achse AB aus einem Punkte I gezogene perpendikular

$$IH = y, \quad OH = x,$$

also ist $AH = AO + OH = a + x$,

$$HB = OB - OH = a - x,$$

und $FH = FO + OH = c + x$,

$$GH = OG - OH = c - x.$$

Beweis: Betrachten wir nun die zwei rechtwinkelichte Dreiecke FIH und GIH, so ist bei dem ersten $\overline{FI}^2 - \overline{FH}^2 = \overline{IH}^2$,

d. i. $aa + 2ad + dd - cc - 2cx - xx = yy$,

und bey dem andern $\overline{IG}^2 - \overline{HG}^2 = \overline{IH}^2$,

oder $aa - 2ad + dd - cc + 2cx - xx = yy$,

derowegen ist auch $aa + 2ad + dd - cc - 2cx - xx = aa - 2ad + dd - cc + 2cx - xx$.

Lassen wir nun die gleichen Grössen, die sich

in

in beiden Gliedern der Gleichung unter einer-lei Zeichen finden aus, so bekommen wir

$$2ad - 2cx = 2cx - 2ad,$$

und diese Gleichung noch weiter reducirt, giebt endlich

$ad = cx$ und $\frac{ad}{c} = x$, wie auch $d = \frac{cx}{a}$.

Nun war vorhero

$a^2 - 2ad + d^2 - c^2 + 2cx - x^2 = y^2$,

und da $a^2 - c^2 = b^2$,

so ist $b^2 - 2ad + d^2 + 2cx - x^2 = y^2$;

da auch $2ad = 2cx$,

so wird $b^2 + d^2 - x^2 = y^2$;

ferner ist $d^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2}$.

Daher ist $b^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 = y^2$,

und $a^2 b^2 + c^2 x^2 - a^2 x^2 = a^2 y^2$.

Weil nun $a^2 - c^2 = b^2$,

so wird $- b^2 = c^2 - a^2$,

und $- b^2 x^2 = c^2 x^2 - a^2 x^2$.

Wenn wir daher diesen Wehrt in die vorige Gleichung setzen, so bekommen wir

$$a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2,$$

und $\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} = y^2$.

Löset man diese Gleichung in eine Proportion auf, so ist $a^2 : b^2 = a^2 - x^2 : y^2$,

oder $\overline{AO}^2 : \overline{DO}^2 = AH \times HB : \overline{IH}^2$.

Da

Da nun dieses eine Eigenschaft der Ellipse ist, §. 397. so mus die Linie IH eine halbe Ordinate, und der Punkt I in der Ellipse sein, welches auf eben diese Art von allen übrigen durch dieses Verfahren bestimten Punkten, folglich von der ganzen beschriebenen Linie erwiesen werden kan.

Lehrsatz.

§. 407. Der Quadratinhalt einer elliptischen Fläche ABCD verhält sich zum Inhalte einer Zirkelfläche, so die grosse Achse zum Durchmesser hat, wie die kleine Achse zur grossen. Fig. 209.

Beweis: Nach dem §. 400. gegebenen Beweise verhalten sich die Ordinaten einer Ellipse wie die Ordinaten eines Zirkels, der die grosse Achse zum Durchmesser hat, d. i.

$$DO : PO = HG : NG$$

und

$$DO : PO = QV : LV,$$

folglich ist auch

$$DO : PO = HG + QV : NG + LV,$$ §. 214. Rechenk. und daher verhält sich DO : PO, wie die Summe aller Ordinaten einer Ellipse zur Summe aller Ordinaten des Zirkels, die Summen der Ordinaten als Elementen dieser Flächen machen aber eigentlich ihren Flächeninhalt aus, und DO ist die kleine Achse,

PO

PO = AO aber die grosse Achse, also verhält sich der Flächeninhalt einer Ellipse zu dem Inhalte eines Zirkels, wie die kleine Achse zur grossen.

Zusatz.

§. 408. Um also den Flächeninhalt einer elliptischen Fläche ACBD zu finden, muß man den Inhalt eines Zirkels, dessen Durchmesser der grossen Achse gleich ist, berechnen, und alsdann folgende Proportion setzen: wie die grosse Achse zur kleinen, also verhält sich der Inhalt des Zirkels zum Inhalte der elliptischen Fläche.

Erklärung.

§. 409. Ein Elliptoides (elliptisches Sphäroid) ist ein Körper, der entstehet, wenn eine elliptische Fläche ACBD um ihre Achse AB beweget wird. Fig. 210.

Lehrsatz.

§. 410. Der körperliche Inhalt eines Elliptoides ACBD ist gleich dem Produkt, aus der Zirkelfläche der kleinen Achse und zween Dritteile der grossen Achse. Fig. 210.

Beweis: Betrachtet daß der körperliche Inhalt eines Elliptoid ACBD, aus einer Menge Zirkelflächen CD, IH, TQ u. s. w.

als

als aus so vielen Elementen bestehe, deren Radien OD, GH, VQ mit den Radien der Zirkelflächen OP, GN, VL u. s. w. einer Kugel ARBP, deren Durchmesser die grosse Achse ist, in Proportion stehen, §. 399. folglich sind auch die Quadrate derselben, und also die Zirkelflächen selbst in Proportion §. 223. und die gröste Zirkelfläche RP der Kugel verhält sich zur grösten Zirkelfläche CD des Elliptoides, wie die Summe aller Zirkelflächen oder Elementen der Kugel zur Summe aller Zirkelflächen oder Elementen des Elliptoides §. 214. Rechenk. Die Summe der Elementen der Kugel aber ist gleich dem Produkte aus der grösten Zirkelfläche RP und $\frac{2AB}{3}$ §. 326. also ist auch die Summe der Elementen des Elliptoides gleich dem Produkte aus ihrer grösten Zirkelfläche CD und $\frac{2AB}{3}$.

Zusatz.

§. 411. Um also den körperlichen Inhalt eines Elliptoides zu berechnen, mus man die Zirkelfläche der kleinen Achse durch $\frac{2}{3}$ der grossen Achse multipliciren.



Drittes Hauptstück.

Von der Hyperbol.

Erklärung.

§. 412.

Fig. 211. Wenn ein Kegel ABC mit einer Fläche nach der Richtung FI parallel mit seiner Achse AM durchschnitten wird, so wird die am Rande des Durchschnits entstehende krumme Linie GKFLH Hyperbol genennet.

Erklärung.

§. 413. Wenn ein Kegel, an welchen ein hyperbolischer Schnit gemacht worden, auch mit der Grundfläche parallel d. i. nach der Richtung DE durchschnitten wird, so wird die Linie KL, in der sich beyde Flächen durchschneiden, und die so wohl auf DE, als FI perpendikular ist, eine Ordinate OL, oder OK eine halbe Ordinate der Hyperbol genennet.

Zusaz.

§. 414. Es sind also die halbe Ordinaten OL, IH u. s. w. mitlere Proportionalen zwi-

schen

schen den Teilen DO, OE, und BI, IC der Diameter der Zirkel, so den Kegel parallel mit seiner Grundfläche durchschneiden. Wenn man sich demnach eine Menge solcher Zirkel einbildet, und zwischen den Teilen ihrer Diameter, in die sie durch den hyperbolischen Durchschnit geteilet werden, so viele mitlere Proportionalen als halbe Ordinaten suchet, so kan man die hyperbolische Linie GFH eben so beschreiben, wie wir es von der Parabol §. 347., und von der Ellipse §. 395. gewiesen haben.

Erklärung.

§. 415. Die Abscisse der Hyperbol ist eine Linie die von dem Scheitelpunkt der Hyperbol bis auf eine Ordinate gehet, und auf denselben senkrecht stehet, oder sie in zween gleiche Teile teilet.

So ist FO die Abscisse der Ordinate KL und FI von GH.

Erklärung.

§. 416. Verlängert man die Seite BA des Kegels bis in X, und die Linie FI so weit, bis sie XA durchschneidet, so wird FX die erste Achse; und lässet man aus A eine Perpendikular AS auf FX fallen, so daß AR = RS wird, so wird AS die zwote Achse der Hyperbol genennet. Beide zu-

sammen aber heissen die koniugirte Achsen.

Erklärung.

§. 417. Die dritte Proportional zu der ersten und zwoten Achse heisset der **Parameter der ersten**; und die dritte Proportional zu der zwoten, und ersten Achse, der Parameter der zwoten Achse.

Lehrsatz.

§. 418. Die Quadrate der Ordinaten der ersten Achse einer Hyperbol verhalten sich zu einander wie die Rechtecke aus den Absciffen und aus der Summe der ersten Achse samt der Abscisse. D. i.

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OF \times OX : IF \times IX.$$

Beweis: 1. Vermög der §. 151. vom Zirkel erwiesenen Eigenschaft ist:

$$\overline{OL}^2 = OD \times OE \text{ und } \overline{IH}^2 = IB \times IC.$$

folglich

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OD \times OE : IB \times IC$$

2. In den zwei ähnlichen Dreiecken DOX und BIX ist

$$OD : IB = OX : IX.$$

und in den zwei ähnlichen Dreiecken FOE, und FIC ist

$$OE : IC = OF : IF.$$

und

und wenn man beide Proportionen mit einander multiplicirt, so ist

$$OD \times OE : IB \times IC = OX \times OF : IX \times IF.$$

§. 216. Rechenk.

3. Setzet man nun in dieser Proportion anstaat dem ersten Verhältnis den oben gefundenen gleichen Wehrt, so ist

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OF \times OX : IF \times IX.$$

D. i. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie obgedachte Rechtecke.

Aufgabe.

§. 419. Eine Hyperbol, wozu die zwo Achsen gegeben sind, zu beschreiben.

Auflösung: 1. Setzet die zwo gegebene Achsen AB, CD dergestalt aufeinander, daß sie sich in ihrem Mittel O perpendikular durchschneiden. Fig. 212.

2. Verlängert AB beiderseits, und auf das verlängerte Stuck AS traget beliebige Teile AK, KL, LM u. s. w. so lange auf, als ihr die gröste Abscisse AS haben wolt; aus A aber errichtet eine perpendikular AI auf AB von unbestimter Länge.

3. Setzet den Zirkel in O, und ziehet mit den Radien OK, OL, OM u. s. w. Zirkelbögen; aus den Teilungspunkten K, L, M

sammen aber heissen die **koniugirte Achsen.**

Erklärung.

§. 417. Die dritte Proportional zu der ersten und zwoten Achse heisset der **Parameter der ersten;** und die dritte Proportional zu der zwoten, und ersten Achse, der **Parameter der zwoten Achse.**

Lehrsatz.

§. 418. Die Quadrate der Ordinaten der ersten Achse einer Hyperbol verhalten sich zu einander wie die Rechtecke aus den Abscissen und aus der Summe der ersten Achse samt der Abscisse. D. i.

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OF \times OX : IF \times IX.$$

Beweis: 1. Vermög der §. 151. vom Zirkel erwiesenen Eigenschaft ist:

$$\overline{OL}^2 = OD \times OE \text{ und } \overline{IH}^2 = IB \times IC.$$

folglich

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OD \times OE : IB \times IC$$

2. In den zwei ähnlichen Dreiecken DOX und BIX ist

$$OD : IB = OX : IX.$$

und in den zwei ähnlichen Dreiecken FOE, und FIC ist

$$OE : IC = OF : IF.$$

und

und wenn man beide Proportionen mit einander multiplicirt, so ist

$$OD \times OE : IB \times IC = OX \times OF : IX \times IF.$$

§. 216. Rechenk.

3. Setzet man nun in dieser Proportion anstaat dem ersten Verhältnis den oben gefundenen gleichen Wehrt, so ist

$$\overline{OL}^2 : \overline{IH}^2 = OF \times OX : IF \times IX.$$

D. i. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie obgedachte Rechtecke.

Aufgabe.

§. 419. Eine Hyperbol, wozu die zwo Achsen gegeben sind, zu beschreiben.

Auflösung: 1. Setzet die zwo gegebene Achsen AB, CD dergestalt aufeinander, daß sie sich in ihrem Mittel O perpendikular durchschneiden. Fig. 212.

2. Verlängert AB beiderseits, und auf das verlängerte Stuck AS traget beliebige Teile AK, KL, LM u. s. w. so lange auf, als ihr die gröste Abscisse AS haben wolt; aus A aber errichtet eine perpendikular AI auf AB von unbestimter Länge.

3. Setzet den Zirkel in O, und ziehet mit den Radien OK, OL, OM u. s. w. Zirkelbögen; aus den Teilungspunkten K, L, M

u. s. w. aber die Parallelen KN, LP, MV u. s. w. zu CD.

4. Suchet zu AB, CD und AE; zu AB, CD und AF, und zu AB, CD und AG die vierte Proportionalen; traget sie nacheinander auf die Parallelen KN, NP, MV u. s. w. und ziehet durch die Punkten A, N, P, V, T die krumme Linie, so wird sie eine Hyperbol sein.

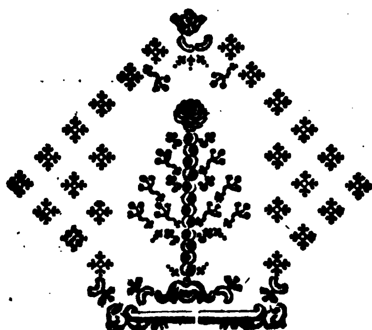
Beweis: 1. Vermög der Eigenschaft des Zirkels ist $\overline{AE}^2 = AK \times AR$,
und $\overline{AF}^2 = AL \times AX$ §. 151.
und vermög der gegebenen Beschreibung ist
$BR = AK$, und $BV = AL$,
folglich ist auch $AR = BK$
und $AK \times AR = AK \times BK$,
und aus der nehmlichen Ursache ist:
$BX = AL$, und $AX = BL$,
folglich $AL \times AX = AL \times BL$.

2. Vermög der Auflösung der Aufgabe ist $KN : AE = CD : AB$,
und $LP : AF = CD : AB$,
folglich ist auch $KN : AE = LP : AF$,
oder $KN : LP = AE : AF$,
nicht minder $\overline{KN}^2 : \overline{LP}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{AF}^2$.
Setzen wir nun anstaat den lezten zwei Quadraten die ihnen gleiche Rechtecke, so ist
$\overline{KN}^2 : \overline{LP}^2 = AK \times BK : AL \times BL$,

d. i.

d. i. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich zu einander wie die Rechtecke aus der Abscisse, und aus der Summe der ersten Achse samt der Abscisse; da nun dieses eben die Eigenschaft ist, die wir §. 418. von der Hyperbol erwiesen haben, so mus auch die beschriebene krumme Linie eine Hyperbol sein.

Da sowohl die hyperbolische, als elliptische Linien in der Artillerie selten vorkommen, so ist es nicht nöhtig, in den gegenwärtigen Anfangsgründen sich weitläuftig dabei aufzuhalten.



Register
Der merkwürdigsten Sachen.

Wenn



Seite §.



Seite

In



El-



Seite

Der



Re=



Ei=



Die



Seite

In



samt



Seite

Der





dem





Ein



Sind



Seite §

Ein





Seite

Wie





Eben



Rom=



Am



Pro-



Ei-



Zir-





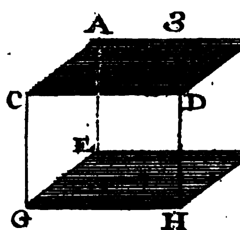
Nachtrag

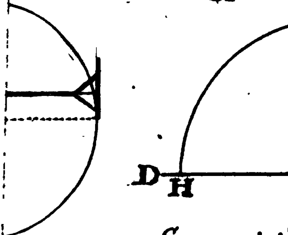
Der im ersten Teil noch wahrgenommenen Druckfehler, und ihre Verbesserungen.

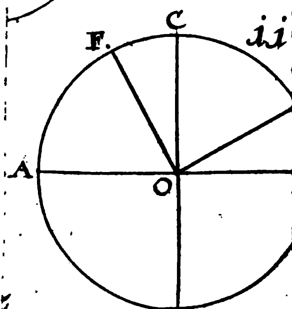
Seite.	Zeile.	Lis	Anstaat.
84	22	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{21}$.
146	2	$\|752\|$	$\|725\|$
100	15	$\frac{2}{12}$.	$\frac{6}{8}$.
154	19	rationalen	irrationalen.
155	14	$3a\sqrt[3]{b}$	$3a\,{}^{3}\sqrt{b}$.
156	6	$3\sqrt{7}$	$9\sqrt{7}$.
………		$\sqrt{7}$	$7\sqrt{7}$.
164	17	$3y$	y.
167	5, 6, 7,	$- acdx$	$+ acdx$.
167	8	$- acd$	$+ acd$.
169	4	9 und 18	6 und 18.
183	20	eine solche Gleichung.	solche Gleichungen.
191	5	$\frac{7a - 44z - 2b}{24}$	$\frac{7a - 44z - 2b}{2}$.
191	7	$\frac{7a - 44m - 2b}{24}$	$\frac{7a - 44m - 2b}{2}$.
199	22	daß die erste $x - 15$ und die anderte $y + 15$ habe	daß $x - 15 = y + 15$
199	22	Das Gewicht eines gewissen Maasses z. B. eines Cubikschuhes.	ein gewisses Maas z. B. ein Cubikschuh.
211	12	$x^2 - \frac{x}{3}$	$x \frac{x}{3}$
211	13	$\frac{1}{6}$	$\frac{x}{6}$
259	2	$\frac{754}{1450}$	$\frac{754}{14500}$
272	21	$\frac{108}{3^3}$	$\frac{180}{3^3}$
287	4	$- 3R$	R.

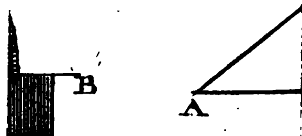
[Ver]besserungen der Druckfehler im gegenwärtigen Teile.

[Seit]e	Zeile.	Lis	Anstaat.
	7	zur Ausmessung	die Ausmessung.
	11	der Schenkel	die Schenkel.
	2	nöhtiget	nöhtig ist.
	5	4 Sch. 8 Zol 9 Lin.	4 Zol 8 Lin. 9 Punkt.
	27, 28,	HGl	HGL.
	4	AE	AB.
	13	worden	werden.
	11	Winkel B	Winkel 7.
	24	Fig. 62.	Fig. 104.
	27	§. 170.	§. 171.
	19	Mittelpunkt D	Mittelpunkt A.
	16	und leztere	und sie.
	22	48''Q.	48Q.
	24	7700'''Q. = 8'''.	7700Q. — 8'''.
9	23	ein schiefes	schief.
9	19	138. 139. 141.	Fig. 138. 139. 140.
2	15	der einem gegebenen.	der mit einem.
3	22	die kleinere	die kleinern.
6	18	$\frac{pa^2}{d}$	$\frac{pa^2}{d}$.

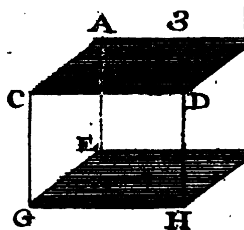

A
3
C
D
E
G
H

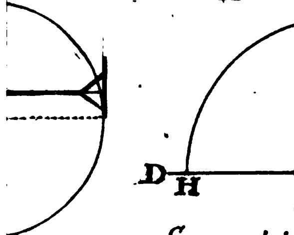

D
H

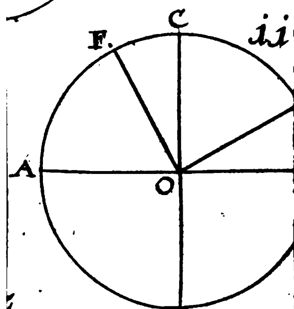

C
11
F
A
O

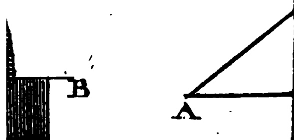

B
A


C
D
17
F

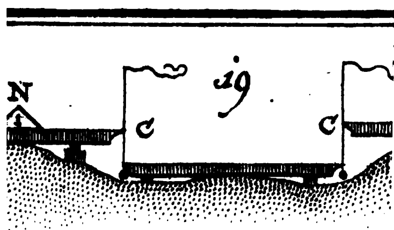

A
3
C
D
E
G
H


D
H

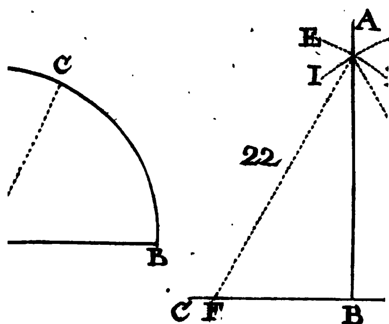

C
11
F.
A
O


B
A

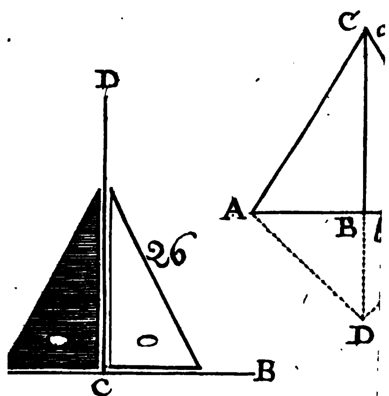

G
E
D
17



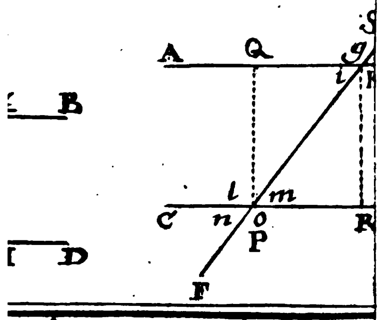
N
C
19
C



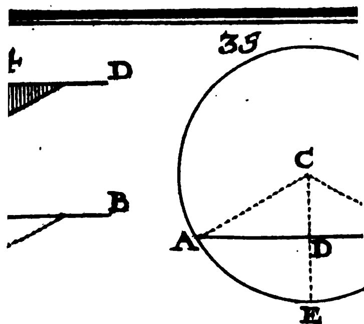
C
B
A
E
I
22
C F
B

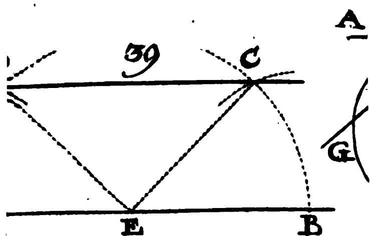


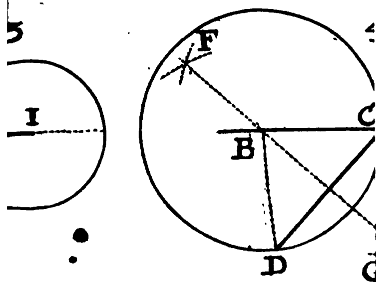
D
26
C
B
C
A
B
D

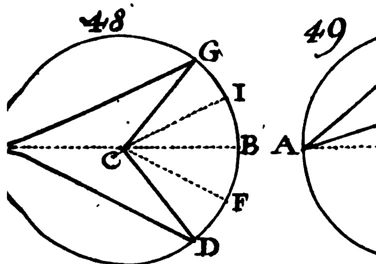


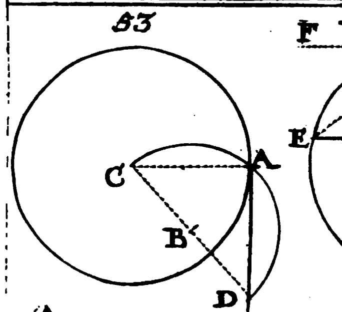
B
D
A
Q
g
i
l
m
C
n
o
P
R
F

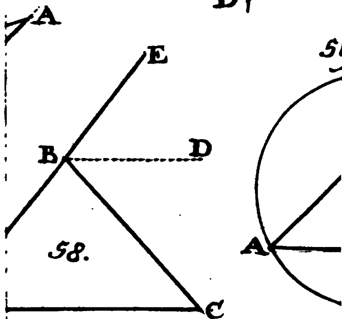

38
D
B
C
A
D
E

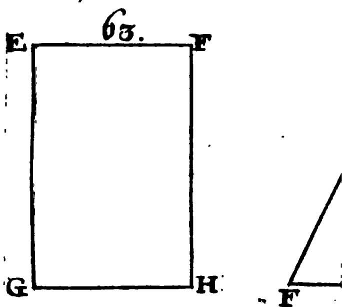

39
C
E
B
A
G

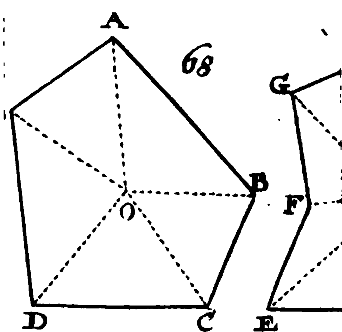

I
F
C
B
D

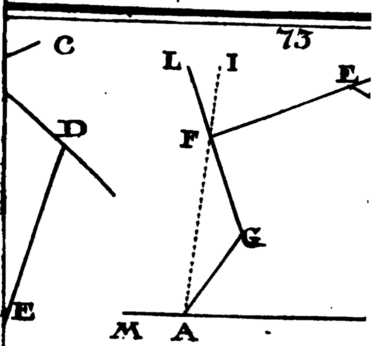

48
G
I
B
C
F
D
49
A

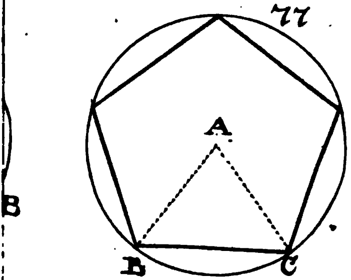

53
F
E
C
A
B
D

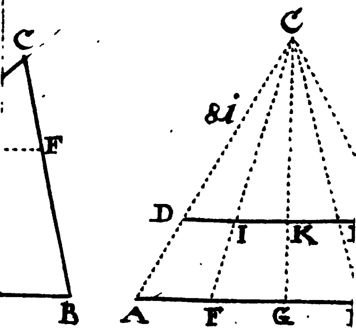

A
E
B
D
58.
A
C

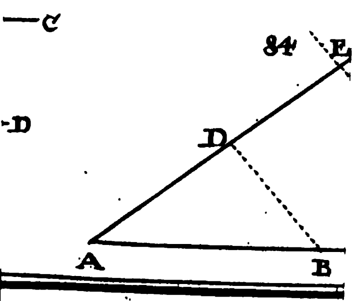

63.
E
F
G
H
F


A
68
G
B
F
O
D
C
E


73
C
L
I
E
D
F
G
E
M
A


77
A
B
B
C


C
C
81
F
D
I
K
B
A
F
G


C
84
E
D
D
A
B

400 500 60

86

O

90

A

10. 20. 30. 40. 50. 60.

10

5

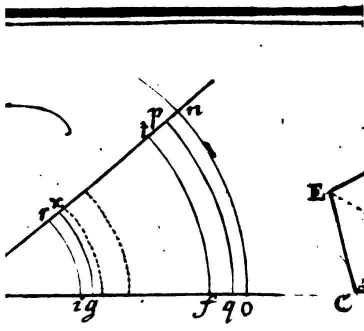
B

10 11 12 13 14

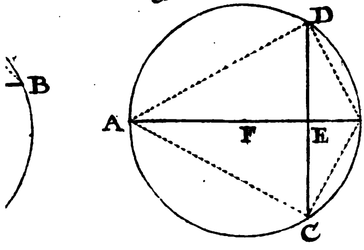
c

D

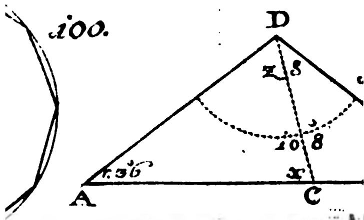
A



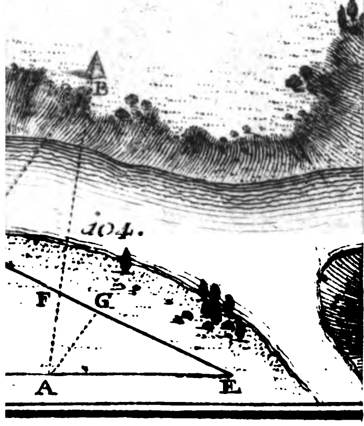
r x
t p n
E
i g
f q o
C



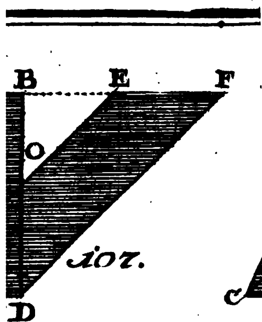
97.
D
B
A
F
E
C

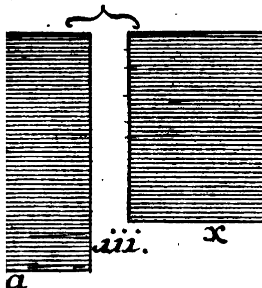


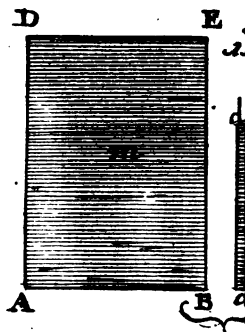
100.
D
z 8
10 8
x
A
C

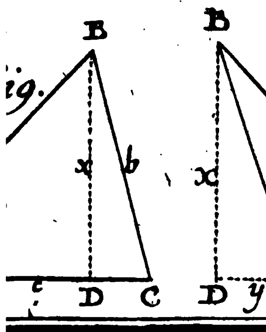


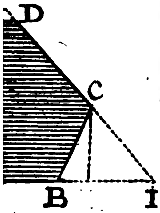
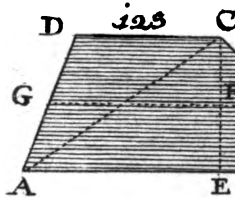
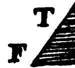
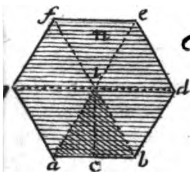
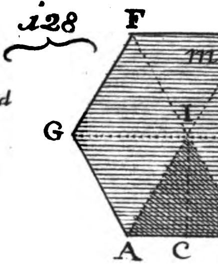
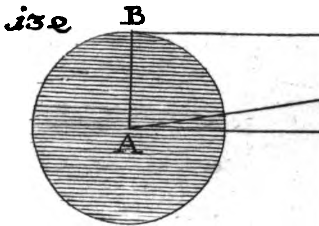
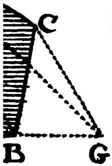
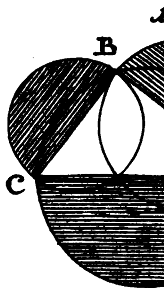
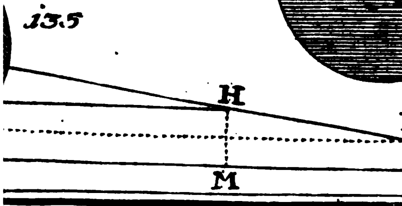
A
B
104.
F
G
A
E

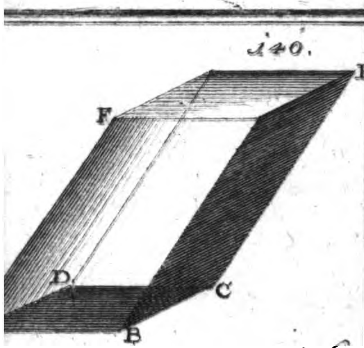

B
E
F
O
107.
D
c

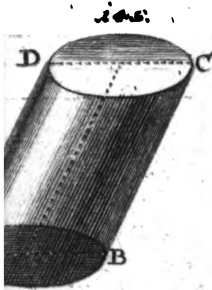

111.
x
a

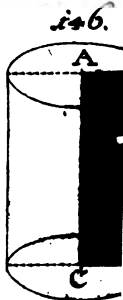

D
E
A
B
d
a

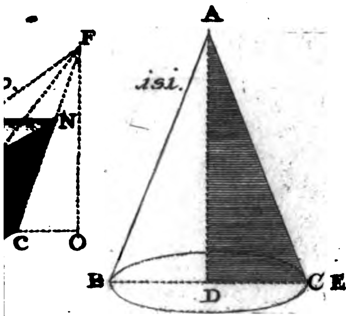

B
B
ig.
x
b
x
c
D
C
D
y

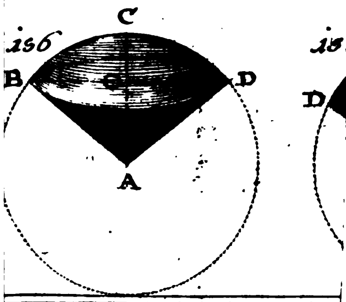

24
D
C
B
I

D
125
C
G
A
E

T
F

f
e
n
d
a
c
b

128
F
m
G
I
A
C

132
B
A

21
C
B
G

B
C

135
H
M

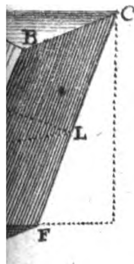

140.
F
D
C
B

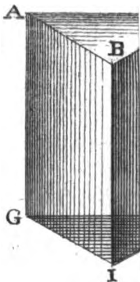

D
C
B

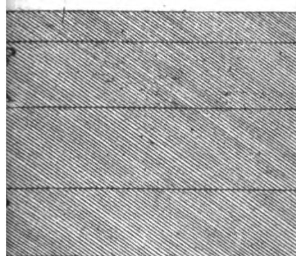

146.
A
C

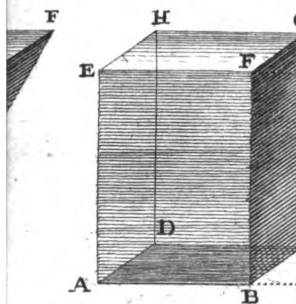

F
N
C
O
A
151.
B
D
C
E

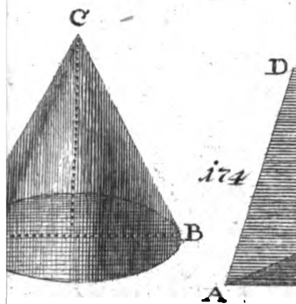

C
156
B
D
A
D

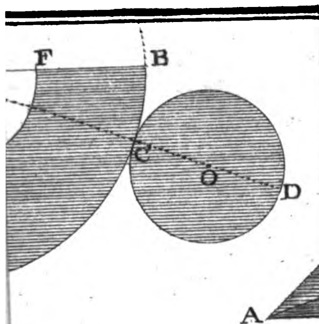

160
C
B
L
F

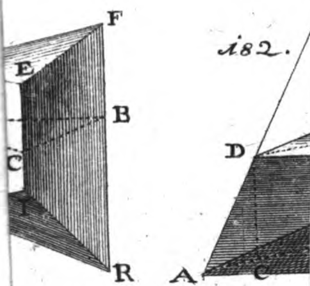

161
A
B
G
I

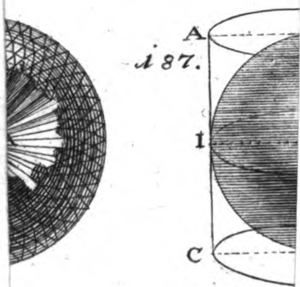

166

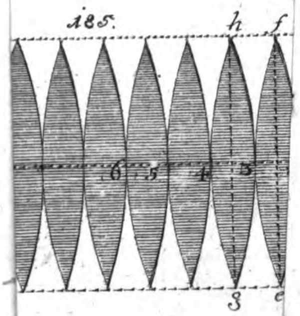

F
H
E
F
D
A
B

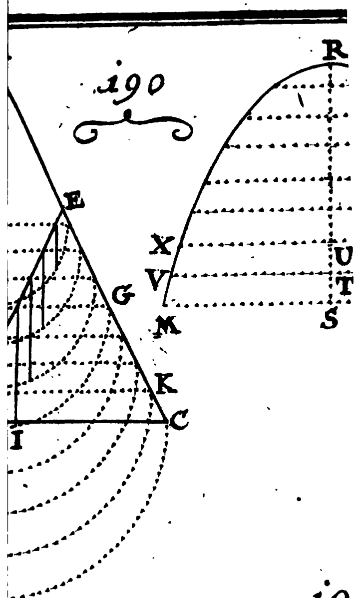

C
D
174
B
A


F
B
C
O
D

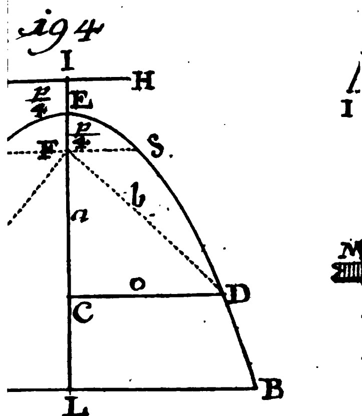

A
F
182.
E
B
D
C
I
R
A
C


A
187.
I
C


185.
h
f
6
5
4
3
g
e

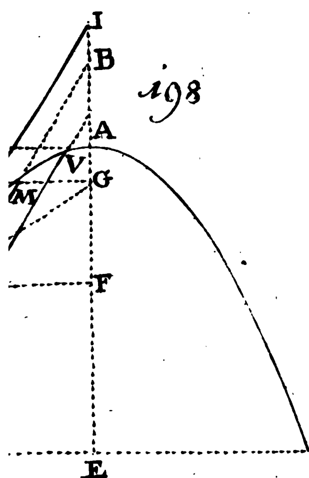


19

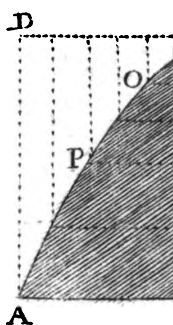


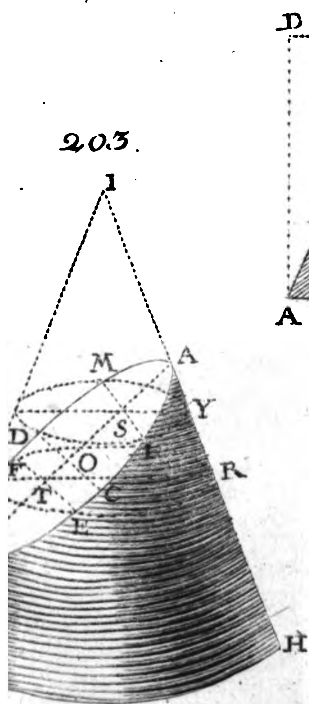
I

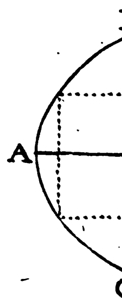
M



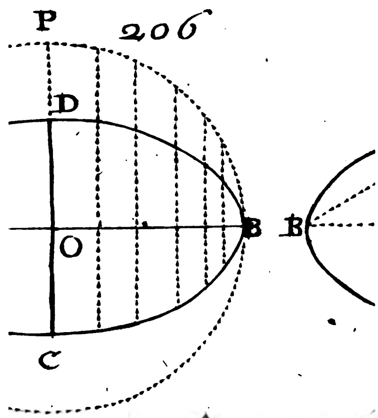


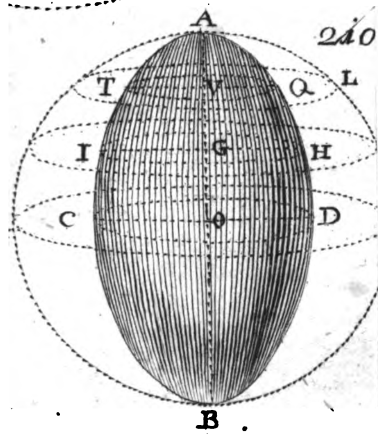


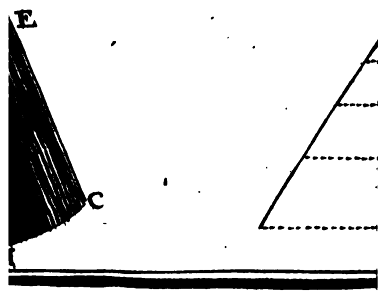




Digitized by Google


P
206
D
O
B
B
C


A
210
T
V
Q
L
I
G
H
C
O
D
B


211
212
C
E
C

